

Informazioni su questo libro

Si tratta della copia digitale di un libro che per generazioni è stato conservata negli scaffali di una biblioteca prima di essere digitalizzato da Google nell'ambito del progetto volto a rendere disponibili online i libri di tutto il mondo.

Ha sopravvissuto abbastanza per non essere più protetto dai diritti di copyright e diventare di pubblico dominio. Un libro di pubblico dominio è un libro che non è mai stato protetto dal copyright o i cui termini legali di copyright sono scaduti. La classificazione di un libro come di pubblico dominio può variare da paese a paese. I libri di pubblico dominio sono l'anello di congiunzione con il passato, rappresentano un patrimonio storico, culturale e di conoscenza spesso difficile da scoprire.

Commenti, note e altre annotazioni a margine presenti nel volume originale compariranno in questo file, come testimonianza del lungo viaggio percorso dal libro, dall'editore originale alla biblioteca, per giungere fino a te.

Linee guide per l'utilizzo

Google è orgoglioso di essere il partner delle biblioteche per digitalizzare i materiali di pubblico dominio e renderli universalmente disponibili. I libri di pubblico dominio appartengono al pubblico e noi ne siamo solamente i custodi. Tuttavia questo lavoro è oneroso, pertanto, per poter continuare ad offrire questo servizio abbiamo preso alcune iniziative per impedire l'utilizzo illecito da parte di soggetti commerciali, compresa l'imposizione di restrizioni sull'invio di query automatizzate.

Inoltre ti chiediamo di:

+ *Non fare un uso commerciale di questi file* Abbiamo concepito Google Ricerca Libri per l'uso da parte dei singoli utenti privati e ti chiediamo di utilizzare questi file per uso personale e non a fini commerciali.

+ *Non inviare query automatizzate* Non inviare a Google query automatizzate di alcun tipo. Se stai effettuando delle ricerche nel campo della traduzione automatica, del riconoscimento ottico dei caratteri (OCR) o in altri campi dove necessiti di utilizzare grandi quantità di testo, ti invitiamo a contattarci. Incoraggiamo l'uso dei materiali di pubblico dominio per questi scopi e potremmo esserti di aiuto.

+ *Conserva la filigrana* La "filigrana" (watermark) di Google che compare in ciascun file è essenziale per informare gli utenti su questo progetto e aiutarli a trovare materiali aggiuntivi tramite Google Ricerca Libri. Non rimuoverla.

+ *Fanne un uso legale* Indipendentemente dall'utilizzo che ne farai, ricordati che è tua responsabilità accertati di farne un uso legale. Non dare per scontato che, poiché un libro è di pubblico dominio per gli utenti degli Stati Uniti, sia di pubblico dominio anche per gli utenti di altri paesi. I criteri che stabiliscono se un libro è protetto da copyright variano da Paese a Paese e non possiamo offrire indicazioni se un determinato uso del libro è consentito. Non dare per scontato che poiché un libro compare in Google Ricerca Libri ciò significhi che può essere utilizzato in qualsiasi modo e in qualsiasi Paese del mondo. Le sanzioni per le violazioni del copyright possono essere molto severe.

Informazioni su Google Ricerca Libri

La missione di Google è organizzare le informazioni a livello mondiale e renderle universalmente accessibili e fruibili. Google Ricerca Libri aiuta i lettori a scoprire i libri di tutto il mondo e consente ad autori ed editori di raggiungere un pubblico più ampio. Puoi effettuare una ricerca sul Web nell'intero testo di questo libro da `http://books.google.com`

NYPL RESEARCH LIBRARIES
3 3433 06909679 4



CORSO
DI
GEOMETRIA
ELEMENTARE, E SUBLIME

Ad uso della Pubblica Istruzione del Regno, e della Reale Accademia di Marina.

DIVISO IN QUATTRO VOLUMI.

VOLUME IV.

Che contiene la Trigonometria Rettilinea e Sferica.

Trigonometry
IC

ELEMENTI

DI

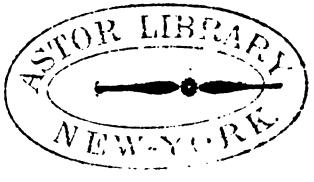
TRIGONOMETRIA

RETTILINEA, E SFERICA.

DI V. FLAUTI

Professore di Analisi Sublime nella Regia Università degli Studj di Napoli, Bibliotecario della Società Reale Borbonica, Socio e Segretario per le Matematiche della Reale Accademia delle Scienze di Napoli, dell' Istituto d' Incoraggiamento, Membro Onorario della Società Reale di Copenaghen, e di altre Accademie, ec.

SETTIMA EDIZIONE



IN NAPOLI
Nella Stamperia della Reale Accademia di Marina.
1820.

V. S.

AVVERTIMENTO.

La presente edizione degli Elementi di Trigonometria, che a poca distanza di tempo ha seguita la precedente, è ad essa identica, e perciò come quella divisa in sei Libri, l' oggetto de' quali vien descritto dall' Autore in fine del seguente *Saggio di Storia Trigonometrica* da lui premesso a questa sua opera fin dalla precedente edizione, che perciò noi ci asterremo qui dal farne parola.

Crediamo intanto indispensabile di avvertire, come nella precedente edizione anche abbiamo fatto, che coloro i quali dovranno far uso di questo libro per la prima istituzione della gioventù nelle Matematiche, se mai gli parrà che i loro allievi sieno troppo gravati, potranno senza tema di guastar la catena delle nozioni elementari di Trigo-

nometria, e senza lasciargli incompleti nell' apprendimento di questa Scienza, tralasciare non solo i due ultimi Libri per intero; ma anche il terzo e quarto Capitolo del Lib. II., e 'l settimo ed ottavo del IV. Come al contrario gli esortiamo a volersi impegnare di far bene intendere a' giovani tutto ciò ch'è compreso nel resto della presente Istituzione.

ERRATA

Pag.	*ver.*		
44	24	D*b*	DB
45	20	CAD	BAD
54	23	*Cas.* 1.	*Cas.* 2.
60	2	rivelarne	rilevarne
	7	AC+CB:AC—CB	CB+AB : CB—AB
67	*ult.*	BE	CE
67	8	sen.B	sen.A sen.B
74	14	essa	esso
75	*ult..cit.Sp.*3.		*s. p.* 3.
88	24	Si cambj il C in A, e l' A in C	
96	24	sen.*a*	sen.*b*
102	1 a 2	Nel precedente Cap.	Ne due precedenti Capitoli.
	17	ADB	AEB
104	22	Si cambj l'*a* in *b*, e 'l *b* in *a*	
106	23 *cit.*	151	161
107	8	BDA	BCA
108	9 *cit.*	155	161
116	28	esiterà	esisterà
122	4	XVI°.	XVII°.
123	12	con	non
125	13	a	e
	12	co-	cose-
126	5	127,128,130,e 132	159, 160, 162, e 164
129	13	11776519	11776516

SAGGIO

DI

STORIA TRIGONOMETRICA.

Siquidem in omni scientiarum genere, nosse quibus gradatim incrementis adolverint jucundissimum est, et ad rerum ipsarum intelligentiam plurimum confert.

SAM. HORSLEY *pag.* 51 *in Com. in Arith. Newt.*

Prime ricerche trigonometriche presso i Greci.

I primi germi delle funzioni circolari apparvero; da che il divino Archimede (1) intraprese a rettificare la circonferenza; poichè da questa ricerca egli si vide passar mano mano dal raggio del cerchio alla determinazione delle corde rappresentanti i lati di quella serie di poligoni regolari successivamente inscritti in esso, crescenti sempre in ragion doppia rispetto al numero de' lati, cominciando dall' esagono; ed egli dovè inoltre procedere ancora alla determinazione delle saette, ed apotemi, o coseni della metà degli archi medesimi. Inoltre trovasi anche da lui determinata la tangente dell' arco di 30°.

(1) Circa 250 anni prima dell' Era volgare.

Dopo Archimede, Ipparco (2) ristauratore dell' Astronomia presso i Greci si occupò pure della determinazione delle corde degli archi circolari, e trattò quest' argomento in dodici Libri, come cel rapporta Teone nel suo Comento all' Almagesto di Tolomeo; e questo lavoro d'Ipparco, per quanto lice congetturarne, doveva essere un compiuto Trattato di Trigonometria per que' tempi.

Seguentemente Menelao, ne' principj del secondo secolo dell' Era volgare, compose sei libri intorno allo stesso argomento. Ma nè meno quest' opera di Menelao, nella quale par che dovessero contenersi non solamente i principj per la determinazione delle corde, ma anche le Tavole di queste è a noi pervenuta. Scrisse anche questo Geometra tre libri degli Sferici, che Maurolico fece il primo conoscere, traducendoli dall' Arabo in Latino, e pubblicandoli nel 1558 (3); ma essi non sono già, come credè il Signor Hutton, un Trattato di Trigonometria Sferica, avendo per oggetto la teorica de' triangoli sferici, intorno a' quali contengono molti teoremi curiosi, e poco conosciuti.

Poco dopo di Menelao, o pure contempora-

---

(1) Circa 150 anni prima dell' Era volgare.

(3) Regiomontano prima del Maurolico gli aveva anche tradotti; ma questa sua opera, insieme con altre traduzioni, che fece de' libri di Matematici Greci, conservasi tuttora manoscritta nella Biblioteca di Norimberga.

neamente, Tolomeo (4) occupatosi dell'Astronomia e della Geografia, dovè necessariamente entrare a trattar di proposito di ricerche Trigonometriche; e la sua opera, ch'è la sola che siaci pervenuta da' Geometri Greci, intorno a questo argomento, può farci conoscere fin dove questa scienza fosse giunta a quel tempo, sia che Tolomeo non abbia fatto altro che raccogliere le cose, ch' egli espone, da' Geometri suoi predecessori, sia che le abbia in gran parte egli stesso inventate.

In tali ricerche egli suppone diviso il raggio del cerchio in 60 parti uguali, di una delle quali si vale poi per unità nel determinare le corde degli archi procedenti per uguali differenze. La Tavola degli archi, e delle corde, ch' egli riporta nel I°. Libro del suo Almagesto contiene tre colonne. Nella prima di esse sono registrati gli archi di 30 in 30 minuti; nella seconda le rispettive corde espresse in parti sessagesime del raggio, co' loro minuti e secondi; e nella terza finalmente le differenze delle corde corrispondenti ad un minuto degli archi, o la 30.ma parte delle differenze tra le corde registrate nella seconda colonna. Egli espone anche in questo luogo il metodo da lui tenuto per la costruzione di questo canone di corde, fondato

---

(4) Questo Matematico antico non fu già nativo di Pelusio, come si è da tutti creduto; ma di Tolemaide in Egitto (*Vegg. il Montucla*).

sul celebre Teorema da lui dimostrato pel quadrilatero inscritto nel cerchio, cioè che: *Il rettangolo delle diagonali pareggia la somma dei due rettangoli ciascuno contenuto da' lati opposti* (5); il qual Teorema tra poco vedremo campeggiare nella nostra costruzione del Canone Trigonometrico. Ed è da credere che non avrebbe quel Geometra sicuramente mancato di compiere sì utile computamento delle corde suddette da lui cominciato, se la Geometria fin da que' tempi fosse stata adorna di simboli algebrici in convenevol modo.

Trigonometria presso gli Arabi.

Il Canone Trigonometrico espresso per le corde degli archi, continuò ad essere in uso fino a circa il nono secolo, alla quale epoca gli Arabi cominciarono a sostituirvi quello de' seni, che a vero dire, è più facile, più comodo, e più spedito del precedente. Dobbiamo inoltre ad essi una maggiore ampliazione di questa scienza, ed alcuni importanti Teoremi, de' quali anche adesso ci valghiamo con qualche vantaggio nella costruzione del Canone.

---

(5) La dimostrazione di questo Teorema è stata da noi recata nell' Addizione al Libro VI. degli Elementi di Euclide (*Vegg. il vol. II. del presente Corso*).

Trigonometria presso gli Europei.

Gli Europei appresero la Trigonometria dagli Arabi, ma è incerta l' epoca in cui ciò avvenne, e chi fu il primo ad apprenderla da essi; nè la Storia delle Matematiche ci presenta cosa che possa esser per noi di qualche importanza intorno agli avanzamenti della Trigonometria presso costoro, fino al principio del 15° Secolo, nel quale Giorgio di Purbach (6) arricchì la Trigonometria e l' Astronomia di nuovi Teoremi, Tavole, ed osservazioni. Egli fu il primo, che per costruire con più approssimazione la Tavola de' seni, immaginò di estendere la divisione del raggio, praticata, come si disse la prima volta da Tolomeo, fino a 600000 parti uguali, e computò poi con tal divisione gli archi circolari da 10 in 10 minuti. E forse la Trigonometria non pochi altri vantaggi avrebbe tratti dall' ingegno, e da' travagli di questo valentissimo Astronomo, se la morte non lo avesse immaturamente rapito alle Matematiche in età di 39 anni.

Le sue tracce però furono ripigliate dal suo allievo Giovanni Muller (7), conosciuto volgarmente col nome di Regiomontano, dalla città di Konigsberg (*Mons Regius*) in cui nacque.

---

(6) Così chiamato, perchè nativo di Purbach, tra l'Austria, e la Baviera, nacque nel 1423.

(7) Nato nel 1436.

Da principio il Regiomontano ritenne la stessa divisione del raggio adottata dal Purbach, e calcolò solamente i seni di minuto in minuto; poi, esaminate meglio le cose, conobbe ch' era più vantaggioso di dividere il raggio decimalmente, e lo suppose perciò di 1000000 parti. Al canone de' seni e coseni, il solo che si fosse conosciuto ed usato fino a lui, aggiunse quello delle tangenti, che chiamò *Foecundus*; ma non vide poi l' uso vantaggioso, che poteva farsene nella Trigonometria. Egli rinvenne inoltre molti nuovi principj per la risoluzione de' triangoli, per mezzo de' quali la Trigonometria Rettilinea arrivò fin d' allora, per questa parte, a quella stessa perfezione in cui presentemente si trova.

Il quinto ed ultimo Libro del suo Trattato *de Triangulis planis et sphaericis* (8), che si ragguarda alle due Trigonometrie, contiene varj Problemi speciosi della risoluzione di queste figure, alcuni de' quali si trovano recati nel Capitolo ultimo del Libro II. della nostra Trigonometria. Ed è da notare che nel numero di essi ve n' ha di quelli, per la risoluzione de' quali era bisogno di quelle supposizioni indeterminate di quantità, che annunziano la conoscenza dell' Algebra; e che per un di essi, il 12 del lib. II., giunto ch' egli è all' equazione, si arresta dicendo: *quod restat, præcepta artis edocebunt*; ed

(8) Un tal trattato fu dall' autore scritto circa l' anno 1464, e pubblicato in foglio a Norimberga nel 1513.

il Montucla nel far ciò notare dice che » potrebbesi » da questa circostanza inferire , che l'Algebra fos- » se stata conosciuta in Europa prima di Luca di » Burgo (soggiungasi e di Lionardo Pisano) se » per avventura non si volesse supporre , che le » soluzioni di siffatti Problemi, contenuti in quel » Lib. V°. della suddetta opera del Regiomon- » tano , fossero state aggiunte dalle Schoner , che » ne fu l' editore, quasi un secolo dopo la morte » dell' autore (9).

Ma il Montucla avendo seguentemente convenuto che il trasporto dell'Algebra in Italia, per opera di Lionardo Pisano, abbia avuto luogo non già , come prima equivocò , nel XV°; ma bensì molto prima nel XIII° secolo (10), cioè quasi due secoli prima che vivesse il Regiomontano, ci libera dall' entrare in qualunque esame a questo proposito. Sicchè al Regiomontano non dovrà farsi il torto , come taluno ha opinato , di non riconoscerlo per autore di quelle soluzioni , ed a noi altri Italiani non dovrà togliersi il vanto di aver fatta conoscere in Europa una tale scienza , chè fummo i primi a coltivare , e che abbiamo poi grandemente contribuito ad accrescere e migliorare.

La perfezione alla quale Regiomontano aveva portata la Trigonometria e il Canone Naturale fece sì , che quasi contemporaneamente con lui molti ad un tratto cominciarono a trattar con successo le

(9) Montucla-*Histoire des Mathématiques.*

(10) Addizioni in fine del Volum. 1. dell' opera poc' anzi citata.

stesse ricerche, aggiugnendo ad esse', e perfezionandole sempre più. Di fatto abbiamo che, a quell'epoca Giovanni Verner compose anch' egli cinque libri su i Triangoli; e'l famoso Astronomo Copernico trattò pure la Trigonometria sì Piana, che Sferica, costruendo il canone de'seni colle differenze per ogni 10 minuti del quadrante, e per un raggio diviso in 100000 parti uguali; ed Erasmo Reinhold costruì e pubblicò le Tavole delle Tangenti, che chiamò, come il Regiomontano, *Canon foecundus*.

A quest' epoca stessa fioriva nelle nostre Regioni un uomo insigne nelle Matematiche, delle quali non lasciò parte che non coltivasse. Francesco Maurolico (11); e non potè essere a meno che quest' uomo agitato dalla voglia di distinguersi tra'suoi contemporanei, in mezzo a tante ricerche Trigonometriche che trattavansi allora, principalmente in Germania, non vi volesse anch' egli la sua parte. Frutto di queste sue fatiche fu l' introduzione delle seganti nel calcolo Trigonometrico, e nella risoluzione de' Triangoli, e l' istituzione della Tavola di esse, che chiamò *Benefica*; e che da lui fu calcolata di grado in grado, e di minuto in minuto (12).

In tal modo dunque il Canone naturale Trigonometrico prese tutta quella perfezione, che conserva anche al presente.

---

(11) Nato in Messina nel 1494.

(12) Veg. a tal proposito il Lib. II°. *Sphaer. Maur.* p. 60.

Falsa è poi interamente l'opinione del Lansbergio, che questo Canone delle seganti si appartenesse al Retico, le di cui Tavole furono pubblicate dopo la morte dell' autore dal suo Allievo Valentino Othone nel 1594, col titolo di *Opus Palatinum*, cioè almeno 36 anni dopo ch'erano comparse in pubblico quelle del Maurolico, che furono pubblicate nel 1558, e prima di quest'epoca da lui medesimo annunziate nel 1550. E la stessa perfezione maggiore delle Tavole del Retico, in paragone di quelle del Maurolico, avendole il Retico costruite supponendo il raggio diviso in 1000000000000000 parti, e di 10 in 10 secondi, annunzia chiaramente, che questo fu posteriore al Maurolico in tal ricerca, e che non potendo prevalergli nell'invenzione, si sforzò sopravanzarlo in perfezione (13). Dopo il

---

(13) Il dotto Astronomo Sig. Delambre, nella sua *Storia dell' Astronomia del Medio Evo*, tratta per verità con troppa ingiustizia il Maurolico, menomandolo di quella non comune considerazione in che l' hanno sempre tenuto i Matematici non solo contemporanei, ma anche posteriori, e delle lodi che gli sono meritamente da essi fatte. Ed ecco come si esprime il Delambre:» » Ce qui a fait vivre le nom de Maurolycus, c'est qu'il » passe pour avoir le premier introduit, dans le calculs » trigonomètriques, l' usage des sècantes, dont il fit » imprimer une table dans le volume, dont voici le » titre en entier ».E qui egli rapporta questo titolo. Di poi dopo aver esitato a credere, nel luogo poc' anzi recato, che Maurolico fosse stato l'introduttore

già detto del Regiomontano, e del Maurolico, si rileverà chiaramente l'errore del Briggs, che attribuisce l'invenzione del Canone delle Tangenti e Seganti a Reinholds.

---

delle seganti nel calcolo trigonometrico, passa a dir qualche cosa delle opere di questo geometra contenute in quel Titolo, senza farne molto caso. Ma se il Signor Delambre si fosse dato il pensiero nella sua analisi critica di queste opere di Maurolico, di considerare i tempi in cui furono fatte; certamente non così felici per le Matematiche come i nostri; ma che però ci hanno prodotta tutta quella luce, che ora ci abbaglia; e se per poco avesse avuta la bontà di gettar lo sguardo sugli altri lavori geometrici del Maurolico, e principalmente per ciò che riguarda i Conici di Apollonio, in cui fece anche cambiamenti tali, che meritarono di essere adottati da varj Geometri, e specialmente dal Signor de la Hire, Francese: se in somma egli avesse voluto deferire per poco al sentimento del Viviani, geometra sommo; il quale, non ostante, che Maurolico non avesse colpito nel segno nella divinazione che fece del quinto libro di Apollonio, pure stimò le geometriche speculazioni fatte dal geometra Messinese degne di lode per modo, che ne tenne conto nella Prefazione ch' egli scrisse per l'altra immortal divinazione, che egli diede del libro stesso del Geometra di Perga. Se a tutto ciò avesse posto mente il Delambre, non dubitiamo affatto, che sarebbe stato uniforme nella maniera di pensare col suo dottissimo compatriota, il Signor Montucla, il quale in più luoghi della sua Storia delle Matematiche, che noi preghiamo di riscontrare, parla con assai rispetto del Messinese Maurolico,

Il Vieta (14) ristoratore e promotore di ogni ramo di Scienze Matematiche a' suoi tempi, si occupò anch' egli della Trigonometria, e stabilì nuovi teoremi importantissimi per la costruzione del Canone, che perfezionò grandemente (15). Egli costruì pure separatamente le Tavole Trigonometriche pe'seni, e quelle per le tangenti e seganti, di minuto in minuto colle loro differenze, e col raggio 100000; e per le tangenti e seganti verso la fine del quadrante, ne estese l' approssimazione ad 8 e 9 cifre (16). È singolare anche, e degna di essere

---

chiamandolo *geometra originale - uno de' più forti geometri del suo tempo - pieno di spirito geometrico*, ec. (Vegg. la storia delle Matem. Vol. I. alle pag. 563, 572 e 696.)

Noi ci siamo astenuti dal produrre qui in favore del Maurolico ciò che sta detto nell' elogio che non ha molti anni ha pubblicato il dotto Ab. Scinà, temendo che questo, sebbene imparialissimo, potesse essere attaccato di deferenza nazionale.

(14) Nato nel 1540 a Fontenai nel Basso Poitou, Provincia della Francia.

(15) Veggansi le sue opere pubblicate da Francesco Schooten nel 1616, e specialmente il trattato *de Sectionibus Angularibus*.

(16) Queste Tavole furono dall' autore pubblicate in Parigi nel 1579, col titolo di: *Canon Mathematicus seu ad triangula, cum appendicibus*. E ad esse aggiunta dall'autore medesimo una seconda parte con l'epigrafe: *Universalium inspectionum ad Canonem Mathematicum liber singularis*, in cui contiensi la costruzione

avvertita la disposizione ch' egli il primo diede a queste Tavole, aumentandole da parte di man sinistra fino a 45°, e ritornando poi in dietro verso destra, per disopra, fino a 90°; sicchè in tal modo ciascun arco, e 'l suo complemento trovansi nella stessa linea, e così le loro linee trigonometriche rispettive. E tal disposizione comodissima è anche al presente ritenuta nelle Tavole Trigonometriche. Il Vieta serbò anche pel canone delle Tangenti la denominazione di *Foecundus*, datali dal Regiomontano, e chiamò *Foecundissimus* l' altro delle seganti.

Serva ciò che si è detto del Vieta di limite a quanto si era fatto per completare il Canone naturale e la Trigonometria; mentre tutto ciò che pro-

---

delle tavole esposta nella prima parte, un compendio di Trigonometria Piana, e Sferica, con applicazione di essa, e molte altre ricerche intorno alla quadratura del cerchio, alla duplicazione del cubo ec. Un tal libro però ebbe la disgrazia di uscire in luce, carico di errori tipografici, lo che al Vieta essendo dispiaciuto, ne ritirò tutte le copie che potè riavere, sperando di poterne fare una nuova edizione corretta, come egli stesso il promise, allorchè parlando della presente sua opera si espresse: *Sed qui anno* 1579 *fuit editus infeliciter Canon meus Mathematicus, is cura secunda recognitus majorem fortassis, apud eos* (*Canonistas*) *obtinebit auctoritatem* (Opera Math. pag. 327.)

Ma tal seconda edizione non avendo però avuto mai luogo, l' opera è divenuta di una rarità estrema. (*Vegg. il Montucla vol.* 1. *pag.* 610.)

dussero su questo argomento in seguito e il Retico, e l' Othone, e il Pitisco, e 'l Lansbergio ed altri, non sono che semplici miglioramenti e riproduzioni delle cose precedentemente fatte; e ciò a fin di giungere celeremente ad una delle epoche più interessanti per la Trigonometria, nella quale questa scienza prese un aspetto tutto nuovo, che ancora conserva, e conserverà sempre.

In tanta copia di ricerche Trigonometriche fatte in Germania, in Italia, ed in Francia, l'Inghilterra sola non sembrava di esservisi interessata grandemente. Questa Nazione però, presso la quale le Matematiche sono state sempre coltivate con impegno, e successo, si serbava ad una scoperta importante e grandissima, cioè all' invenzione de' Logaritmi, ed alla costruzione del canone artificiale.

Giovanni Nepero Barone Scozzese (17), uomo dotato di un intelletto penetrante, spaventato dalle immense moltiplicazioni e divisioni che facevano di bisogno, volendo far uso delle Tavole Trigonometriche fino allora costruite, si diede ad escogitare qualche mezzo onde facilitare queste operazioni ne' grandi numeri; ed egli ritrovò a tal proposito un metodo, che espose in un opera da lui pubblicata nel 1617, col titolo di *Rabdologia*, o sia *numeratio per virgulas* (18). Egli però non fu interamente

---

(17) Nato circa la metà del secolo XVI.°

(18) Il metodo della *prostaferesi*, che non molto prima avevano i Trigonometri ritrovato, per evitare

pago di questa sua invenzione; e perciò si diede ad escogitar nuovi mezzi, e più efficaci per riuscir nell' intento, e pervenne così alla meravigliosa invenzione de' logaritmi, ch' egli pubblicò colle stampe nella sua: *Logarithmorum Canonis Descriptio; seu Arithmeticarum supputationum mirabilis abbreviatio ec. Edimbourg* 1614. E siccome il suo principale interesse in questa invenzione era stato la facilitazione de' calcoli Trigonometrici; così egli non applicò i logaritmi che a' seni, costruendo effettivamente le Tavole logaritmiche di tutt' i seni degli archi di un quadrante di minuto in minuto. Egli non diede in questa prima opera il suo metodo per la costruzione delle Tavole logaritmiche, ma promise di darlo, ed avrebbe certamente tenuto parola, se la morte non avesse rapito quest' uomo infinitamente utile alle Matematiche nel 1618. Il suo figlio però, Roberto Nepero, non mancò di pubblicare nell' anno stesso l' opera alla quale stava il padre travagliando, col titolo di *Mirifici logarithmorum Canonis constructio, ec.*

Non è questo il luogo di discorrere più a lungo su i logaritmi di Nepero; ma non sarà poi inutile di far avvertire, che la Tavola ch' egli diede de' logaritmi de' seni differiva dalle nostre ordinarie Tavole in ciò, che il logaritmo del raggio è in quel-

---

in qualche modo le moltiplicazioni di quantità trigonometriche, quantunque ingegnoso, era nondimeno imbarazzante, e non era nè attivo, nè universale.

la effettivamente o donde avviene, che i logaritmi Neperiani de' seni vanno crescendo al minorarsi di questi. Nè poi siffatti logaritmi sono costruiti per la base 10. come per le ordinarie Tavole; sistema ch' egli stesso seguentemente immaginò, e che, come deducesi dall' epigrafe della summentovata opera, il figlio annunziò al pubblico dopo la morte del padre. Ma sia, per questo luogo, abbastanza detto dell' invenzion di Nepero intorno a' logaritmi. Egli però se tanto giovò alla Trigonometria per la computazione, non tralasciò dall'altra parte di occuparsi de'principj per la risoluzione de'triangoli, principalmente per la Trigonometria Sferica, per la quale ridusse tutta la risoluzione de'triangoli rettangoli a due regole fondamentali, o piuttosto ad una sola divisa in due parti facilissime ad apprendersi ed a ritenersi. Ed il Montucla con ragione si duole della poca avvertenza, che da'Trigonometri del Continente si era posta in farle ben ravvisare. Oltre a ciò diede anche alcune regole utilissime per la pratica risoluzione de'Triangoli sferici obbliquangoli, le quali oggigiorno, mercè i multiplici usi della Trigonometria Sferica, non si veggono più trascurate ne' Corsi Elementari di questa scienza. Finalmente stabilì e dimostrò pe' triangoli sferici diversi teoremi nuovi, che costituiscono una notabile armonia tra le due Trigonometrie.

Dopo il Nepero, com' era naturale, i Trigonometri si volsero immantinente alla costruzione delle Tavole de' logaritmi de' numeri, e delle linee trigonometriche, alle quali si diede il nome

di *Canone Artificiale*; ma non è del nostro scopo l'occuparci di queste cose; sicchè passeremo sotto silenzio le fatiche illustri di tanti sommi uomini intorno a questo soggetto.

La Trigonometria parve dopo tutti questi travagli di sommi uomini già giunta al suo grado massimo di perfezione, e di fatti nulla mancava nè per le regole atte a risolvere i diversi casi de'triangoli sì rettilinei che sferici, nè per la comoda computazione di tali regole in pratica. La Trigonometria Sferica però non presentava lo stesso grado di perfezione che la Rettilinea, nè nell' applicazione delle regole, nè nel calcolo de' triangoli; e l' uso della perpendicolare in risolvere i triangoli sferici obbliquangoli produceva in taluni casi tale sconcio, che aveva indotto in equivoco anche abili Trigonometri, ed assai pratici in questo genere di computi, come il La Caille (19). Inoltre le regole Neperiane, principalmente pe' triangoli obbliquangoli trovavansi sbandite da tutte le istituzioni di Trigonometria Sferica, e molto male a proposito. Finalmente non vi era stato alcuno, il quale avesse ravvisata la mirabile corrispondenza tra un triangolo sferico, ed un angolo solido compreso da tre angoli piani, e che avesse dedotta dalla natura di questi i principj per la risoluzione di quelli. Mancava inoltre alla Trigonometria Sferica una forma analitica tale, che si comprendessero in una formola ge-

(19) Vegg. il Cagnoli (*Trigon. pag.* 327 *ediz.*2.)

nerale tutt' i casi diversi della risoluzione te' triangoli sferici sì rettangoli che obbliquangoli; e dobbiamo a Leonardo Eulero tutti questi vantaggi proccurati alla Trigonometria Sferica, ch' egli espose in una Memoria inserita nel Vol. III. P. I. degli Atti Nuovi di Pietroburgo, per l' anno 1779 coll' epigrafe: *Trigonometria Sphaerica universa, ex primis principiis breviter et dilucide derivata.*

Dopo Eulero non ha potuto essere a meno, che tutti coloro i quali hanno trattato lo stesso argomento non siensi valuti degli artifizj da lui usati; e bisogna anche convenire che, grazie alle fatiche di questo sommo Analista, la Trigonometria Sferica è stata dopo lui, da tutti quelli che l' hanno esposta seguendo il suo metodo, assai ben trattata. Ma lungo sarebbe il trattenersi anche per doco intorno ai diversi Elementi di Trigonometria composti dai moderni.

Non devesi però tralasciare di far quì parola di un eccellente e completo Trattato sulla Trigonometria, dell' egregio Matematico Antonio Cagnoli, da pochi anni tolto alle Matematiche, ed al decoro Italico. Egli ha compreso in questo libro pubblicato da lui due volte in Italiano, e ciascuna volta tradotto nell' idioma Francese, con moltissimo ordine e chiarezza, tutto quanto mai poteva conoscersi intorno alla Trigonometria, corredando le teoriche da lui esposte con opportuni esempj di Problemi che elegantemente risolve. Tutte le formole delle due Trigonometrie vi sono trattate, e per maggior comodo di coloro che debbono va-

lersene, esse trovansi espresse in tavole da potersi consultare all' uopo. A tutte queste cose egli ha aggiunte le analogie differenziali de' triangoli sì rettilinei che sferici, trattando quest'argomento in maniera affatto nuova.

Nè quì tacerò anche il completissimo Trattato di Trigonometria e Poligonometria del mio egregio amico il Signor Professore Franchini di Luccá, Matematico che co'suoi ottimi studj ed assidue fatiche onora la nostra Italia e la scienza che tanto ama e coltiva.

Or fino a questo punto con tanti progressi che le due Trigonometrie avevano fatto, nessuno aveva ravvisato che i moderni Teoremi delle funzioni circolari, come anche il problema della multisezione angolare, e l' altro analogo dell' inscrizione di un poligono regolare nel cerchio; e la serie del seno e coseno dell' arco potevano dedursi come immediate conseguenze da un Teorema, che pei principj della costruzione del canone aveva stabilito il primo Trigonometra Tolomeo. E ciò essendo venuto in mente al nostro valentissimo Signor Fergola, egli distese su questo proposito due Memorie che trovansi inserite nel Vol. I. degli Atti della nostra Accademia delle Scienze, pubblicato nella fine del prossimo passato anno; ed io estraendo da tali Memorie quella parte che alle mie ricerche elementari si conveniva, me ne sono valuto in questo mio libro, nel quale sarà vantaggioso il vedere uniformemente dimostrati coll' ajuto di quel Teorema Tolemaico i diversi Teoremi del Vieta sulle corde

degli archi circolari, e la formola del seno e coseno della somma e differenza di due archi dati, come pure quelle altre che da esse dipendono.

Ma ecco di questa mia opera il Prospetto. Io l'ho divisa in sei Libri, e ne' primi quattro, che sono gli essenziali per l'insegnamento, ho esposto, nel I°. la costruzione del Canone, o che si voglia essa ottenere per le vie che somministra il calcolo aritmetico applicato a' principj di Geometria, come il facevano gli antichi; o che si voglia ottenere per elementari formole algebriche. Ho tralasciato le formole trigonometriche trascendenti, nè ho additata la maniera speditissima di poter ottenere tal costruzione di Canone per queste vie; perchè qui non si tratta di vedere come si possa costruire il Canone suddetto; ma solamente come il costruirono; trovandosi le Tavole de' seni già belle e formate. D' altronde siccome l' uso grandissimo di queste formole trascendenti ha luogo nell' Analisi degl' Infiniti, esse debbono entrare a far parte di questa, o servire ad essa d' Introduzione; cho perciò saranno esposte nel luogo che sarà loro convenevole.

Nel II°. Libro ho trattato della Trigonometria Rettilinea, esponendo i principj per la risoluzione de' Triangoli, non solamente negli ordinarj casi, cioè in quelli risultanti dalla combinazione delle sei parti di essi, tre a tre, fuorchè tre angoli; ma anche in alcuni altri casi, ne' quali o queste parti sono diversamente combinate; o pure sono implicitamente contenute in alcune altre forme di dati

dalle quali bisogna derivarnele per la risoluzione del quesito. Ed in ciò fare mi sono uniformato a quello che aveva praticato Regiomontano, che come già si disse aveva trattate quistioni di questa natura nel V°. Libro della sua opera *de Triangulis*; ed a molti Trigonometri moderni che lo avevano imitato. Ho cercato pure che le risoluzioni di tali Problemi fossero eleganti il più che fosse possibile.

Nel III°. Libro ho esposto la natura e le proprietà de' Triangoli sferici, dottrina indispensabile a premettersi agli Elementi di Trigonometria Sferica, molto più che di essa in alcun altro luogo del nostro Corso non vien trattato. Ed a questo proposito ho cercato di correggere le ordinarie dimostrazioni, che trovansi presso taluni autori, sull'eguaglianza de' lati e degli angoli rispettivi de' triangoli sferici in alcuni casi, le quali mi sono sembrate vacillanti.

Il IV°. Libro espone i principj per la risoluzione de' Triangoli sferici, secondo Eulero, ed i medesimi dopo essere stati ritrovati e dimostrati in forma algebrica, si veggono poi ridotti in logaritmiche espressioni comodissime per l'effettiva calcolazione de' triangoli sferici obbliquangoli; il che dà luogo alle regole del Nepero, di cui si è già di sopra accennata qualche cosa. E nell'esporre le regole per la risoluzione de' triangoli sferici si è avuto riguardo a dar sempre quella tra le diverse formole che poteano adoprarsi per un dato caso, che fosse la più comoda e conducente, e per la facilità, e per l' esattezza; lo che si era anche praticato

pe' triangoli rettilinei. Ed a questo proposito diremo di passaggio che non bene fanno coloro, i quali, principalmente in libri elementari, abbondano in formole ed in regole di risolvimento pe'triangoli per uno stesso caso; ciò non solamente produce confusione nell'animo de'giovani, e per mancanza di quel giusto discernimento che si conviene nel far uso di esse, gliele fa alla rinfusa adoperare, e senza metodo; ma talvolta anche gli annoja, e ne devia l'attenzione. D'altronde è si facil cosa il presentar le formole trigonometriche sotto diverso aspetto, che potrebbe questo loro cambiamento di vesti moltiplicarsi continuamente; ed allora di questa scienza limitata a pochi principj, se ne formerebbe una scienza estesa oltremodo ed implicata. I Professori però, per esercizio di scuola, faranno bene ad occupare i loro allievi in queste trasformazioni facilissime di formole trigonometriche; poichè in tal modo oltre ad avvezzarli a vederle sotto diversi aspetti, ond'è che non si confonderanno trovandole diverse in altri autori in cui potranno incontrarle, servirà ciò anche loro di esercizio algebrico, e come una manuduzione a quelle moltiplici trasformazioni, che saranno poi essi obbligati a fare nelle formole algebriche studiando il calcolo sublime, e la meccanica. Le ricerche su i casi dubbj nella risoluzione de'triangoli sferici è necessaria cosa che non si tralascino nel trattar gli Elementi di Trigonometria: nell'esporle però ho cercato di farlo colla maggior chiarezza e brevità che mi è stato possibile, e senza entrare in tanti inutili particolari.

Ho aggiunto questa volta al presente libro due Capitoli, uno intorno alla perpendicolare ne' triangoli sferici, e l'altro per la determinazione dell'aja di cui si ha talvolta bisogno; nè questa l'ho determinata che nel solo caso de' tre angoli dati, o de' tre lati, per le ragioni che si potranno vedere nel Capitolo ove ne tratto.

Nel V°. e VI°. Libro della Trigonometria, che sono destinati *ad abundantiorem scientiam*, e che possono aversi come un' utile istruzione ed esercizio per coloro che studiano l'applicazione dell'analisi alla Geometria, ho trattato dell' uso vantaggioso delle formole Trigonometriche nel risolvimento di quei Problemi ove il quesito si vuole in valore, e ne' quali fra' dati sono alcune quantità angolari; e del vantaggio che può talvolta ottenersi dalle formole trigonometriche acciocchè si pervenga facilmente ad una pura equazione algebrica, e quindi capace di una geometrica composizione. Ed era sommamente necessario, che io qui trattassi e l'uno l'altro di questi argomenti, ora principalmente che in tutti i libri di Geometria analitica si fa sfoggio grandissimo di formole trigonometriche pel rinvenimento dell' equazione ad un problema geometrico, che analiticamente si risolva, senza fare alcuna distinzione tra quesito in valore, e quesito geometricamente costruibile. Ed a questo proposito avvertirò di passaggio pel secondo de'sopraddetti argomenti, che allorquando parlo dell'uso delle formale trigonometriche pel rinvenimento di una equazione algebrica, o riducibile a tale per mezzo di qualche trasformazio-

ne, in cui si passi da formole trigonometriche a rapporto tra rette, intendo già che questa trasformazione sia di per se chiara, e facile ad ottenersi; poichè altrimenti niun vantaggio avremmo per la sua soluzione, essendosi obbligato a tante diverse costruzioni particolari complicate, dalle quali poi inelegantissima e priva di uso diverrebbe la composizione geometrica del Problema. Siccome i Problemi che io reco per lo stabilimento del metodo onde far uso delle formole trigonometriche nel risolverli, non hanno altro oggetto che questo, così ho tralasciato di maneggiare l' equazione ad essi, allorchè vi son pervenuto. E prevengo intorno a ciò il Pubblico, per non incorrere nella taccia dovuta a coloro che costumano al presente di creder risoluto il Problema, allorchè lo hanno messo in equazione talvolta d' incostruibil forma; o pure di aver tracciate le vie per pervenirvi.

Tra i Problemi che ho recato nell'ultimo Libro si troverà quello della trisezione angolare, che per la sua importanza, e pel nesso strettissimo che ha colla Trigonometria meritava di avervi luogo. In fine di tutto questo, non ho voluto tralasciare taluno avvertimento che conveniva fare in qualche luogo del mio Trattato, ma che non stava a proposito nel luogo stesso; o dimostrar talvolta qualche difetto o qualche cosa notabile in altri libri di Trigonometria facili a pervenire in mano de' giovani, e che meritano di essere ad essi raccomandati; ed ho perciò aggiunte in fine del Trattato alcune Note, tra le quali una lunga intorno al problema

della Trisezione angolare, ch' è la riproduzione di un mio rapporto fatto all' Accademia Reale delle Scienze di Napoli, come Segretario di essa per le Matematiche, in occasione di una folla di pretese soluzioni di Trisegatori ispirati che ad essa le hanno presentate. Non intendo già con questo di persuaderli di ciò che non sono nel caso di comprendere; ma solamente di non far disperdere quest'Opuscoletto, che per le notizie che contiene potrà riuscire di qualche utilità ai giovani, l'istruzione de' quali è il mio scopo principale.

ELEMENTI

DI

TRIGONOMETRIA.

LIBRO I.

DELLE QUANTITA' CIRCOLARI, E DEL LORO CALCOLO.

CAP. I.

DELLA DIVISIONE DELLA CIRCONFERENZA, E DELLA MISURA DEGLI ANGOLI.

1. La necessità di misurare le figure diede luogo allo stabilimento di alcune regole, dalle quali surse poi una scienza sulla natura e sul rapporto delle grandezze figurate, che chiamossi Geometria. Ma non sempre gli elementi onde questa misura si derivava erano tali che si potevano valutare con moduli meccanicamente eseguiti, come avviene quando per avere la base e l'altezza di un parallelogrammo o di un triangolo ci serviamo del palmo, del piede, o di altra misura lineare. Di fatto era chiaro dalla Geometria, non solamente esser valutabile l'aja di un triangolo, dati i valori della sua base ed altezza; ma anche quando fosse da-

to il rettangolo de' suoi lati, e l'angolo da questi compreso (*).

Nel primo caso però la valutazione del triangolo era manifesta, e poteva ottenersi con misure lineari; e nel secondo vi doveva entrare a calcolo il valor dato di quell'angolo; al che fare non valendo le semplici nozioni di Geometria, bisognò perciò ricorrere in que' casi a degli altri espedienti, e da ciò derivò la TRIGONOMETRIA generalmente presa, della quale designeremo specialmente la natura e la divisione in appresso. Sicchè una tale Scienza, anche senza aver riguardo a' bisogni dell'Astronomia, della Geografia, e delle operazioni geodesiche, delle quali cose senza dubbio dovettesi far uso fin da' primi tempi della Geometria, può essa considerarsi come di origine puramente geometrica dipendente dalla valutazione delle figure in que' casi ne' quali tra gli elementi della loro esibizione vi entravano angoli.

Adunque il fondamento di questa scienza è la misura degli angoli; e questa fu facile a rilevarla dagli Elementi stessi di Geometria. Un teorema recato da Euclide, in fine del VI° Libro de' suoi Elementi stabilisce un rapporto tra gli angoli posti al centro di un cerchio e gli archi che gli sottendono, dond'è che facilmente si rileva che questi crescendo in proporzione di quelli, potevansene comodamente prender per misura. E di tal genere di misure *vicarie* altre se n' erano già adottate pe' diversi usi della vita.

2. Dato questo primo passo conveniva dar poi l'altro

(*) Imperocchè in questo caso, come si rileverà facilmente dal Lib. II. di questi Elementi, il *rettangolo dato de' lati sta all' aja del triangolo, come il raggio al seno del dato angolo.*

di ridurre la circonferenza a quantità discreta, fissando per essa un' unità; si scelse perciò avvedutamente la 360ma parte di quella, che chiamossi *grado*. Avvedutamente ho detto, per la ragione che potendosi adottare un qualunque altro numero per esprimere la circonferenza, si prescelse quello che in un ristretto periodo di cifre conteneva il più di divisori esatti, di modo tale che si poteva ottenere espresso per un intero la metà, la terza, la quarta, la quinta, la sesta, l' ottava, la nona, la decima, la duodecima, la quindicesima, e fin la diciottesima parte della circonferenza; il che molto era importante per la costruzione del canone, cioè per la fissazione de' valori delle linee trigonometriche, come tra poco vedremo (*).

3. Suddivisero inoltre ogni grado in 60 parti, a ciascuna delle quali diedero il nome di *minuto primo*; perchè chiamarono *secondi* quelle altre 60 parti in cui supposero diviso ogni minuto primo, e così supposero diviso il minuto secondo in 60 *terzi*, ed ulteriormen-

(*) Vi è chi ha congetturato che la divisione della circonferenza in 360 parti sia derivata dall' essersi diviso il raggio ch' è uguale alla sottesa della sesta parte della circonferenza corrispondente in 60 parti; ma allora la nostra opinione verrà a spiegare perchè siasi diviso il raggio in 60 parti piuttosto che in altro numero. Alcuni altri hanno congetturato che quella divisione della circonferenza avesse avuto luogo dall' antica composizione dell' anno in 360 giorni, donde avveniva che la circonferenza dell' eclittica restava naturalmente divisa in 360 parti uguali ciascuna corrispondente ad un giorno. Ma una tal supposizione fa dipendere assolumente dall'azzardo una ricerca che necessariamente doveva interessare gli usi ulteriori a' quali tal divisione della circonferenza doveva esser destinata; e poi non ispieghierebbesi il perchè siasi ogni grado suddiviso sessagesimalmente, e nel modo stesso il raggio del cerchio.

te. La ragione per la quale adottarono di preferenza agli altri questo numero 60 fu la stessa della poc'anzi assegnata per la divisione della circonferenza.

4. Ad indicare i gradi, i minuti primi, i secondi, ec. sogliono i Trigonometri servisi del °, ′, ″, ec. nel modo seguente, così per esprimere un arco o un angolo di 55 gradi, 23 minuti primi, e 44 secondi, scrivono 55° 23′ 44″.

5. Questa comodissima ripartizione della circonferenza ha avuto luogo, con pieno effetto per gli usi a cui era destinata, da' tempi più remoti della Trigonometria fino a noi, ed ha ancor luogo; se non che è da notare che il Keill nell' Introduzione alla sua Trigonometria di passaggio disse, che taluni, indicando così il Vieta ed altri, avrebbero voluto che il grado si fosse diviso in parti centesime piuttosto che sessagesime, ed aggiugendovi per parte sua, che forse sarebbe stato utile di dividere il grado e la circonferenza in ragion decupla (*); ed i Trigonometri Francesi ultimamente hanno ciò mandato ad effetto costruendo delle Tavole in cui la circonferenza supponesi divisa in 400 gradi, e ciascun grado in 100 minuti. Noi però riterremo per la costruzione del canone, che quì appresso esporremo, l' antica divisione, e sarà poi facile il ravvisare come possa effettuarsi tal costruzione servendosi della nuova divisione: per altro riesce lo stesso il servirsi per gli usi pratici di Trigonometria delle une, o delle altre Tavole, nè il maneggio delle une merita al-

(*) *Quidam gradum in partes centesimas, potius quam sexagesimas partiri volunt: et utilius fortasse esset, non gradus, sed et ipsum circulum in decupla ratione secare, quae divisio forsan aliquando obtinebit.*

cuna preferenza ogni qual volta le Tavole si abbian già, come tante ve ne sono esattissime, belle e costruite; e può poi anche farsi uso delle tavole decimali ne' casi che gli angoli si sieno misurati in gradi per l'antica divisione, o al contrario, non essendovi bisogno che di una semplicissima riduzione.

Intanto per metter tutto il rigore geometrico che si conviene nel sistema esposto per la misura degli angoli per gli archi di cerchio, stabiliremo i due seguenti Teoremi.

PROPOSIZIONE I.

TEOREMA.

6. *Tutti gli archi di cerchio descritti tra i lati di un angolo, preso per centro il suo vertice, contengono lo stesso numero di gradi e minuti.*

Sia l'angolo BCR, e tra i suoi lati sieno descritti co' raggi CB, C*b*, e col medesimo centro C gli archi circolari BR, *br*, e di più sien completati i quadranti BAC, *ba*C; starà l'angolo BCR all'angolo BCA, come l'arco BR all'altro BA*. E similmente l'angolo *b*C*r* sta all'altro *b*C*a*, come l'arco *br* all'arco *ba*. Ma l'angolo BCR sta all'altro BCA, come l'angolo *b*C*r* all'altro *b*C*a*: adunque sarà pure l'arco BR all'arco BA, come l'arco *br* all'arco *ba*; cioè il numero de' gradi e minuti di BR starà a 90°, come il numero de' gradi e minuti di *br* a 90°. Laonde gli archi BR, *br* dovranno essere dello stesso numero di gradi e minuti. C. B. D. *fig.* 1. * 33. VI.

7. *Cor.* Da ciò si vede, che qualunque sia il raggio di un cerchio, è invariabile il numero, ch' espri-

me in gradi e minuti il valore di un angolo, ch' è al centro di esso.

PROPOSIZIONE II.

TEOREMA.

8. *Due angoli disuguali posti a' centri di due disuguali cerchi, sono tra loro in ragion composta da quella degli archi che gli sottendono, e dall' inversa de' raggi de' cerchi.*

fig. 2. Sieno i due angoli BCS, *b*C*r* posti a' centri di due cerchi, che abbiano disuguali i raggi CB, C*b*, e che si suppongano descritti intorno al comune centro C. È manifesto che l' angolo BCS stia all' altro BCR, come l' arco BS all' arco BR. Ma è poi BS a BR in ragion composta di BS : *br*, e di *br* a BR, o sia di BS a *br*, e di C*b* a CB. Adunque starà pure l' angolo BCS all' altro BCR, cioè a *b*C*r*, in ragion composta dalla ragion degli archi BS, *br* che gli sottendono, e dalla reciproca de' raggi C*b*, CB di que' cerchi intorno a cui centri essi sono posti. C. B. D.

CAP. II.

DELLA NATURA DELLE QUANTITA' CIRCOLARI, E DEL LORO RAPPORTO.

9. *Def.* 1. *Complemento di un arco* è la differenza di esso dal quadrante.

E *Supplemento di un arco* è la differenza di esso dalla semicirconferenza.

Così l' arco di 30° tien per complemento quello di 60°; e 'l complemento di 60° è l' arco di 30°.

E l' arco di 150° è il supplemento di quello di 30°.

10. *Def.* 11. *Seno di un arco* è la perpendicolare, che si abbassa da un suo estremo sul raggio, che passi per l' altro estremo. Questo seno suol dirsi *seno retto*, o *seno primo*.

11. *Cor.* 1. Il seno d'un arco è lo stesso di quello del di lui supplemento.

12. *Cor.* 2. Prolungandosi il seno di un arco fino ad incontrare un'altra volta la circonferenza è chiaro, che si otterrà la corda dell' arco doppio del dato; che perciò si vede, che: *Il seno di un arco è la metà della corda dell' arco doppio.*

13. *Def.* 111. *Tangente d' un arco* è quella retta, che il tocca in un suo estremo, e si distende insino al raggio prodottovi per l' altro estremo,

14. *Def.* IV. E tal raggio prodotto insino alla tangente di un arco, si dirà di lui *segante*.

15. *Def.* V. *Coseno di un arco* è il seno del di lui complemento. E *Cotangente* di un arco è la tan-

gente del di lui complemento. E si dirà *Cosegante* di un arco la segante del complemento di esso.

16. *Def.* VI. *Senoverso* di un arco è quella parte del diametro interposta tra un estremo dell'arco stesso e 'l suo seno retto; ed esso risulta, come si vede, dal prendersi la differenza tra il raggio ed il coseno dell'arco.

Il senoverso suol chiamarsi anche *saetta*, colla qual voce il designarono i Trigonometri antichi.

fig. 3. 17. *Scol.* Per illustrare le precedenti definizioni, ad un punto qualunque M del quadrante AMD si conduca il raggio CM, che si produca verso T. Ed abbassate dal detto punto le perpendicolari MP, MQ su i raggi AC, CD, si tirino agli estremi A, D del quadrante le tangenti AT, DS, che incontrino in T, S il raggio CM.

Sarà MP il seno dell'arco MA, AT ne sarà la tangente, e CT la segante. Inoltre le rette MQ, DS, CS si diran coseno, cotangente, e cosegante del detto arco AM rispettivamente; poichè tali rette sono il seno, la tangente, e la segante dell'arco MD, ch'è il complemento di AM. E finalmente la PA sarà il senoverso del proposto arco AM.

18. Le quantità descritte nelle definizioni dal n°. 10 fino al 16 sono quelle che si sono dette *quantità circolari*, ed esse chiamansi anche *linee trigonometriche*, perchè è per loro mezzo che si perviene alla risoluzione de' triangoli, oggetto della Trigonometria, come vedremo a suo luogo.

19. Le suddette linee trigonometriche hanno tra loro il rapporto che ora passeremo a rilevare.

Per la similitudine de' triangoli TAC, MPC sta AT ad AC, come MP a PC; cioè: *la tangente dell'arco* AM *al raggio, come il seno dello stesso arco al*

suo coseno. Ed essendo parimente CT a CA, come CM a CP; starà *la segante di un arco al raggio, come il raggio al coseno*. Finalmente, per la simiglianza de' triangoli GAT, CDS, dee stare TA ad AC, come CD a DS, cioè *il raggio: dee esser medio proporzionale tra la tangente, e la cotangente di un arco*.

Ed indicando per ϕ un qualunque arco, e per R il raggio del cerchio cui si appartiene, della qual lettera ci serviremo sempre in appresso per dinotare un raggio indeterminato di cerchio, se ne rileveranno per le sue linee trigonometriche le seguenti equazioni, cioè

$$\text{tang. } \phi = \frac{R.\ \text{sen. } \phi}{\text{cos. } \phi}$$

$$\text{seg. } \phi = \frac{R^2}{\text{cos. } \phi}$$

$$\text{cot. } \phi = \frac{R^2}{\text{tang. } \phi} = \frac{R.\text{cos. } \phi}{\text{sen. } \phi}$$

CAP. III.

De' segni che appartengonsi alle linee Trigonometriche ne' quattro diversi quadranti del cerchio, e de' valori ch' esse hanno negli estremi di questi.

fig. 3. 20. Nel cerchio ADBE si tirino due diametri AB, DE perpendicolari tra loro, e gli archi dell'intera circonferenza s' incomincino a contare nel quadrante AD da D verso A; è chiaro, che di un qualunque arco DM minore del quadrante DA, ne sia MP o CQ il coseno, e DQ il senoverso. Ciò posto la MP perpendicolare al diametro AB si prolunghi in m, e si vedrà che l' altro arco DAm supplemento di DM abbia per suo coseno la mP, o Cq, uguale a CQ, e per senoverso la Dq. E perchè il coseno Cq deve essere quanto la dif-
* 16. ferenza del raggio CD, e del senoverso Dq*, perciò una tal Cq dovrà risultar negativa. Vale a dire, che: *un arco minore del quadrante, e 'l suo supplemento hanno lo stesso coseno; ma questo è positivo per lo primo, negativo per l' altro.* Si abbassi ora da m la mqm' perpendicolare al diametro DE, si vedrà, che l' arco DAEm' minore di tre quadranti, e maggiore di due abbia per suo conseno $m'p$, o sia Cq, cioè lo stesso di quello dell' arco DAm, o anche quello di DM, o Em', preso negativamente: cioè: *un tal arco avrà per coseno quello del suo eccesso sulla semicirconferenza, preso negativamente.*

Finalmente da m' si abbassi sul diametro AB la perpendicolare $m'p$M', sarà M'p il coseno dell' arco DAEBM', ed esso pareggerà QC coseno di MD, o di

DM′; ossia *un arco maggiore di tre quadranti, e minore della circonferenza avrà per suo coseno quello stesso che si appartiene all' arco ch' è il compimento all' intera circonferenza.*

E dalle cose finora dette in questo numero si rileva, che: *Il coseno di un qualunque arco di un quadrante sia anche coseno del suo supplemento; lo sia inoltre della semicirconferenza accresciuta di esso; e finalmente della circonferenza minorata di esso: per lo secondo e terzo de' suddetti archi però bisognerà prenderlo negativamente.* Cioè indicando per φ quell' arco, per n il suo coseno, e per π un quadrante, sarà

$$\text{cos. } \varphi \ldots\ldots = \text{cos. } (4\pi - \varphi) = n$$
$$\text{e} \quad \text{cos. } (2\pi - \varphi) = \text{cos. } (2\pi + \varphi) = -n$$

21. Premesse le considerazioni su i coseni degli archi dell' intera circonferenza, sarà facile il passar da esse a quelle de' seni per gli stessi. S' incomincino di fatto tali archi a contare non più da D verso A, ma al contrario da A verso D, è chiaro che QC coseno dell' arco DM, e dell' altro DAEBM′, sarà seno dell'arco AM, o pure di ADM′, che sono supplementi l'uno dell' altro. Similmente C*q* coseno dell' arco DA*m*, e dell' altro DAE*m*′, sarà seno dell' arco ADB*m*′, o pure dell' altro ADBE*m*, il primo de' quali eccede la semicirconferenza per l' arco B*m*′ = AM, e l' altro manca dalla circonferenza per l' arco A*m* uguale allo stesso AM. Adunque i due indicati archi, l' uno maggiore della semicirconferenza, e minore di tre quadranti, l' altro maggiore di tre quadranti, e minore di quattro hanno i loro seni negativi, e ciascuno quanto quello di un arco minore del quadrante. E dalle cose finora esposte in questo numero si rileva, che: *Il seno di un arco minore del quadrante, è anche seno del suo sup-*

plemento, della semicirconferenza accresciuta di esso, e della circonferenza minorata dello stesso; ma per questi due ultimi archi deve esser preso negativamente. Cioè servendosi delle stesse indicazioni di poc' anzi per gli archi, ed indicando con m il seno dell' arco φ sarà

$$\text{sen. } \varphi \ldots\ldots = \text{sen. } (2\pi - \varphi) = \mp m$$
$$\text{sen. } (2\pi + \varphi) = \text{sen. } (4\pi - \varphi) = -m$$

22. Or siccome le altre linee trigonometriche si derivano da queste, e dal raggio del cerchio, per mezzo delle analogie recate nel n°. 19, è perciò facile ad intendersi, che: *Le linee trigonometriche di un qualunque arco minore del quadrante debbano appartenersi anche al suo supplemento; ad un arco che risulta dall'aggiugnere al proposto la semicirconferenza; e finalmente a quello, che si ottiene togliendolo dalla circonferenza.* E sarà facil cosa il vedere quali segni debbano tali linee trigonometriche avere in ciascuno di questi altri tre casi, col tenersi conto de' segni de' seni, e coseni corrispondenti.

23. Adunque una volta che siensi esibite le linee trigonometriche per tutti gli archi di un quadrante, si sapranno anche quelle per tutti gli archi dell' intera circonferenza; il che è sufficientissimo per gli usi ordinarj della Trigonometria, della Geografia, e dell' Astronomia; e solamente bisognerà far attenzione al segno che bisogna dare ad esse. Ed è per questa ragione, che le Tavole Trigonometriche non contengono, che solamente le epressioni di tali linee per gli archi del quadrante.

24. E volendo poi estendere un poco le precedenti considerazioni, sarà facile il rilevare, che le linee trigonometriche di quegli archi, che risultano dal sommare ad una, due o più circonferenze un arco qualunque

di essa, siano le stesse di quelle di un tal arco aggiunto. Così che dinotando con π la circonferenza di un cerchio, e con φ un suo arco qualunque, sia

$$\text{sen. } (n\,\pi + \varphi) = \text{sen. } \varphi$$
$$\cos. (n\,\pi + \varphi) = \cos. \varphi$$

e similmente per le altre linee trigonometriche.

25. Finalmente convien qui far anche notare quali sieno i valori delle linee trigonometriche negli estremi de' quattro quadranti.

Dalle definizioni II., III., e IV. si ricava evidentemente, che nel punto A dal quale s'incominciano a computar gli archi della circonferenza ADBE, il qual punto viene indicato da 0°, sia o il seno, e la tangente; e che la segante sia espressa dal raggio CA: e poichè il complemento di un arco 0° è 90°, cioè il quadrante AD, il cui seno è il raggio DC, il maggior di tutti i seni, detto perciò *massimo*; quindi si vede, che il coseno dell'arco 0° debba essere generalmente espresso da R.

Inoltre dalle medesime definizioni si rileva, che il coseno del quadrante AD sia o, e che la tangente, e la segante sieno infinite; poichè la AT, ed il raggio CD non posson mai incontrarsi, essendo parallele. Nell'altro estremo B della semicirconferenza ADB ritorna ad esser o il seno, e la tangente; e il coseno dovendo esser quello stesso dell'arco 0° supplemento di 180°, preso però negativamente, sarà quindi espresso da $-$ CB, o sia $-R$: ed anche $-R$ sarà la segante, come si rileva facilmente dalla seconda analogia del n.° 19.

Alla fine de' tre quadranti, cioè nel punto E, il coseno diviene o, il seno è CE preso negativamente, cioè $-R$, come facilmente si vede; e la tangente

e la segante si fanno di nuovo infinite, per la stessa ragione detta di sopra: il loro segno sarà però quello, che gli viene dal tener conto del segno del seno e del coseno di un tal arco. Finalmente all' estremo A di quattro quadranti, o dell' intera circonferenza ADBEA, divien nuovamente o il seno; ed il coseno, e la segante si fanno quanto CA, cioè R; e quindi la tangente è anche o.

26. Premesse le cose dette ne' due numeri precedenti, ecco per ajuto della memoria la seguente

TAVOLA

DE' SEGNI DELLE PRINCIPALI LINEE TRIGONOMETRICHE NE' QUATTRO QUADRANTI.

Arco	Seno	Coseno	Tang.
0°	+ o	+ R	+ o
Dopo 0° *fino a* 90°	+	+	+
90°	+ R	+ o	+ ∞
Dopo 90° *fino a* 180°	+	−	−
180°	+ o	− R	− o
Dopo 180° *fino a* 270°	−	−	+
270°	− R	− o	+ ∞
Dopo 270° *fino a* 360°	−	+	−
360°	− o	+ R	− o

27. Il seno di un arco, la di lui tangente, la segante, il coseno, la cotangente, e la cosegante sono le linee trigonometriche adottate da' Geometri per la risoluzione del triangolo. E le linee trigonometriche dell' arco AM appartengono eziandio all'angolo ACM, di cui quello è misura.

28. Or le suddette linee trigonometriche, non essen-

do in effetto grandezze geometriche, come par che indichino le definizioni quassù rapportate per esse, ma bensì numeri, possono perciò modificarsi nella seguente convenevol forma. Cioè, prendendo il raggio per l' unità delle linee trigonometriche, come costumasi di fare.

Il seno dell' arco AM è il valor numerico, che tiene la perpendicolare abbassata da un suo estremo sul raggio, che passi per l' altro: la tangente di un arco è il rapporto del seno al coseno di esso; e la segante è quanto l' unità divisa pel coseno: cioè,

$$\text{tang. } \varphi = \frac{\text{sen.}\varphi}{\cos.\varphi} \qquad \text{seg. } \varphi = \frac{1}{\cos.\varphi}$$

PROPOSIZIONE III.

TEOREMA.

29. *Le linee trigonometriche di due archi dello stesso numero di gradi e minuti, presi in cerchi diversi, sono proporzionali a' raggi de' cerchi.*

Intorno al centro C si descrivano co' raggi CB, Cb i due quadranti circolari BRA, *bra*, e poi si tiri il raggio CR*r*; è manifesto che i due archi BR, *br* sottendendo lo stesso angolo in C, debbano essere dello stesso numero di gradi, e minuti *. Ciò premesso si tirino tutte le linee trigonometriche di tali archi; è chiaro che i triangoli CRN, CR*n* sono simili tra loro, che perciò le RN, *rn*, e le CN, C*n* sono proporzionali ai raggi CB, *cb*: ed essendo CB : C*b* :: CN : C*n*; sarà permutando, convertendo, e di nuovo permutando CB : C*b* :: BN : *bn*. Essendo poi simili gli

fig. 11

* 9.

altri triangoli CBD, C*bd*, sta BC : *b*C : : BD : *bd* : : CD: C*d*. Si è dunque dimostrato che le linee trigonometriche dell' arco BR, e quelle dell' altro *br* sono proporzionali a' raggi CB, C*b*. C. B. D.

3o. *Cor.* Quindi quel numero, ch' esprime le linee trigonometriche in un dato cerchio, per un arco determinato, e per lo raggio diviso in un dato numero di parti, rappresenterà anche le linee trigonometriche di un arco dello stesso numero di gradi e minuti in un altro cerchio; purchè il raggio si supponga diviso similmente al primo. E se i raggi di due cerchi sieno rappresentati da numeri diversi; le linee trigonometriche corrispondenti a due archi dello stesso numero di gradi e minuti, presi in essi, dovranno esser dinotate da numeri proporzionali a quelli esprimenti i raggi.

Che perciò si serberà invariato il valore delle linee trigonometriche di un arco in parti del raggio, se questo si supponga = 1. Ed una tal supposizione è stata adottata da tutt' i Trigonometri, dal Regiomontano in poi, perchè la più semplice, e la più comoda.

CAP. IV.

DEL CANONE TRIGONOMETRICO, E DELLA MANIERA DI COSTRUIRLO, SERVENDOSI DI PRINCIPJ RICAVATI DALLA GEOMETRIA ELEMENTARE.

31. *Def.* VII. *Canone trigonometrico* è una tavola, ove a ciascun arco minore del quadrante, ed espresso ne' suoi gradi e minuti, ascrivonsi i valori numerici delle linee trigonometriche, che gli appartengono, presovi per unità il raggio. Un tal registro di linee trigonometriche, dicesi volgarmente *Tavola de' seni.*

32. *Cor.* Dividendosi ogni grado in 60′, il quadrante, ch' è di 90°, sarà di 5400′. Laonde saran pure 5400 quegli archi minori del quadrante, che vadan successivamente crescendo di un minuto.

Nella tavola de' seni il primo arco, cui appongonsi le sue linee trigonometriche, è di 1′. Il secondo è di 2′; e così successivamente per 5400 termini, l' ultimo de' quali è di 90°. E per evitare i fratti nel computo di ciascuna linea trigonometrica, il raggio, ch' erasi preso per l'unità, s'intende diviso in 10000000, o più parti decimali. E ciascuna di dette linee vedrassi espressa nel solo numeratore di un fratto decimale, cui si sottintende il denominatore 10000000.

33. *Scol.* Il canone trigonometrico riducesi a risolvere il seguente general problema. *Dato il rapporto numerico di un arco al quadrante, ritrovare il rapporto che serbi al raggio ciascuna linea trigonometrica di esso arco.*

La costruzione di questo canone, dagli antichi eseguivasi con operazioni aritmetiche a certe grandezze geometriche applicate, e da' moderni si suole anche da alcune analitiche espressioni rilevare. Esso suol distinguersi in *lineare*, o *naturale*; ed *artificiale* o *logaritmico*. Il lineare è il già definito. E 'l logaritmico esibisce i logaritmi volgari delle linee trigonometriche, come nelle comuni tavole de' seni si osserva.

LEMMA.

34. *Se sono date l' espressioni numeriche di due lati di un triangolo rettangolo, sarà anche data quella del rimanente lato. E ciò sovente ottiensi per approssimazione.*

fig. 4. *Cas.* 1. Suppongansi dati i valori de' cateti RN, NC del triangolo RNC rettangolo in N; sarà la somma de' quadrati di questi due valori, o di questi due numeri, uguale al quadrato di quel numero, che n' esprimerebbe l' ipotenusa RC. Adunque la radice quadrata della somma dell' espressioni de' due cateti NR, NC sarà l' espressione dell' ipotenusa RC. Che se la retta RC sia incommensurabile alle RN, NC, come il più delle volte avviene, l' anzidetta radice non potrà aversi esattamente, ma per approssimazione; e tal ne sarà il valore dell' ipotenusa RC.

Cas. 2. Se diasi in numeri l' ipotenusa CR, e 'l cateto NR, l' altro cateto NC sarà espresso dalla radice della differenza del quadrato dell' ipotenusa CR, e di quello del cateto RN. Lo che si dimostra come nel precedente caso.

PROPOSIZIONE IV.

TEOREMA.

35. *Il coseno di un arco è la radice della differenza del quadrato del raggio, e del quadrato del seno di esso arco.*

L'arco RB tien per seno il valor numerico della perpendicolare RN calata dal suo estremo R sul raggio CB, che passa per l'altro estremo B *. E lo stesso arco ha per coseno il valore numerico della RM, o della sua uguale NC. Di più il raggio trigonometrico RC si è posto uguale ad 1. Dunque dalle date espressioni dell'ipotenusa RC, e del cateto RN del triangolo rettangolo RNC, che sono il raggio, e'l seno dell'arco RB, si avrà, per lo teorema precedente, il valore dell'altro cateto CN, cioè del coseno dell'arco RB; ed ei sarà la radice della differenza de' quadrati del raggio, e del seno di esso arco. C.B.D. fig. 4. * 28.

36. *Scol.* L'arco RD sia di 30°; il suo complemento RA di 60° ne sarà doppio; e la corda RA di questo, ch'è il lato dell'esagono, e perciò uguale al raggio AC, che supponesi 1, dovendo essere il doppio del seno RN dell'arco RB *, sarà quindi sen. $30° = 1/2$; * 32. e per conseguenza RM o NC, cioè sen. 60°, o pure cos. $30° = \sqrt{(1 - 1/4)} = 1/2\sqrt{3}$.

PROPOSIZIONE V.

TEOREMA.

37. *Se nella circonferenza di un cerchio prendansi ovunque due archi contigui ed uguali, e da un punto della medesima circonferenza cadano tre rette agli estremi loro: sarà la corda di uno di essi archi a quella dell'arco doppio, come la media di coteste incidenti alla somma delle incidenti estreme, o alla loro differenza, secondochè quel punto stia fuori de' due archi uguali, o si ritrovi in uno di essi.*

fig. 5. *e* 6. Vale a dire, se EF ed FG sieno que' due archi uguali, e dal punto A della circonferenza cadano agli estremi loro le tre rette AE, AF, AG, sarà

$$EF : EG :: AF : AG \pm AE.$$

Ove il segno + nell' ultimo termine vale per la *fig.* 5, e'l — per la 6.

fig. 5. *Cas.* 1. Per lo quadrilatero AGFE inscritto nel proposto cerchio deve essere $AF \times EG = AG \times EF +$ * *D.* VI. $AE \times FG = EF\,(AG + AE)$, essendo EF=FG. Adunque sarà

$$EF : EG :: AF : AG + AE.$$

fig. 6. *Cas.* 2. Similmente a cagion del quadrilatero GFAE inscritto nel cerchio EAFG, è pure $AG \times EF = AE \times FG + AF \times EG$; cioè $EF\,(AG - AE) = AF \times EG$. Adunque dovrà essere

$$EF : EG :: AF : AG - AE.$$

E perciò se nella circonferenza ec. C.B.D.

38. *Cor.* 1. Per l'estremo E dell'arco EF si tiri il diametro ER, e si congiungano le altre due rette FI, FR (I è il centro). Saranno simili i due triangoli isosceli EGF, FRI, per avere uguali i due angoli FGE, FRE fatti in una medesima porzione di cerchio. Onde starà fig. 6.

EF : EG : : FI : FR.

39. *Cor.* 11. E paragonando quest' analogia colle ultime de' Casi 1. e 2. del proposto Teorema, si avrà anche

FI : FR : : AF : AG $\pm$ AE,

Cioè: *L'incidente a quel punto medio dee stare alla somma o alla differenza di quelle due altre incidenti, come il raggio del cerchio alla corda del supplemento di uno di que' due archi uguali.*

PROPOSIZIONE VI.

TEOREMA.

40. *Dall'estremo A del diametro AH del cerchio ALHF si tronchino successivamente gli uguali archi AB, BC, CD, DE, EF, FG, ec., qualunque sia il numero di essi, o la grandezza di ciascheduno; e poi da quell' estremo a' punti delle divisioni B, C, D, E, F, G, ec. si tirino altrettante rette AB, AC, AD, AE, AF, AG, ec. Dico esser ciascuna di quelle corde alla somma di quelle due che le sono prossimamente vicine da una parte e dall'altra, come il raggio del detto cerchio alla corda del supplemento di uno di quegli archi uguali.* fig. 7.

Cioè per qualunque punto F di tal divisione deve stare

AF : AG+AE : : BI : BH

Dim. Il presente teorema ritrovasi già dimostrato nel *Cor.* 1. della Proposizione precedente.

41. *Cor.* Supponendo il raggio AI = 1, sarà

$$AF : AG + AE :: 1 : BH$$

e quindi

$$AF \times BH = AG + AE,$$

ovvero

$$AG = AF \times BH - AE.$$

Cioè: *Ciascuna delle corde AC, AD, AE, AF, AG, ec. sarà uguale al prodotto della sua precedente per la corda supplementale BH, diminuito della corda antiprecedente.*

42. E traducendo questa enunciazione in espressione trigonometrica, col sostituire alle corde il doppio seno della metà dell'arco contermine, ed alla corda supplementale BH il doppio coseno della metà del primo arco AB, il quale dinoto ora con 2ϕ, e perciò con 4ϕ, 6ϕ, 8ϕ, ec. gli altri che corrispondono alle corde AD, AE ec., e finalmente dividendo per 2 le equazioni risultanti; si avrà, incominciando dalla corda AC

$$\text{sen.}2\phi = 2.\text{sen.}\phi\ \cos.\phi$$

$$\text{sen.}3\phi = 2.\text{sen.}2\phi\ \cos.\phi - \text{sen.}\phi$$

$$\text{sen.}4\phi = 2.\text{sen.}3\phi\ \cos.\phi - \text{sen.}2\phi$$

ec.

SCOLIO.

43. E se dall'altro estremo H di quel diametro AH si conducano a' medesimi punti delle divisioni C, D, E, F, G, ec. le altre corde HC, HD, HE, HF, HG, ec.; è chiaro che debba anche essere

$$BI : BH :: HF : HE + HG$$

Cioè: *Il raggio del cerchio alla corda supplementale BH, come ciascuna di quelle altre corde alla somma di quelle due che le sono prossimamente vicine da una parte e dall'altra.*

44. E supponendo anche in questo caso il raggio, cioè BI=1, si troverà come nel Cor. al n°. 41, che: *Ciascuna di queste corde supplementali è quanto il prodotto di quella BH nella sua precedente, diminuito della corda antiprecedente.* Cioè, dando a quelle corde i valori trigonometrici che ad esse corrispondono in doppj coseni delle metà degli archi computati da A, agli estremi de' quali sono esse rispettivamente tirate, e poi dividendo per 2 le equazioni risultanti, sarà per le corde HC, HD, HE, ec.

$$\cos.2\phi = 2.\cos.^2\phi - 1$$
$$\cos.3\phi = 2.\cos.2\phi\ \cos.\phi - \cos.\phi$$
$$\cos.4\phi = 2.\cos.3\phi\ \cos.\phi - \cos.2\phi$$

ec.

PROPOSIZIONE VII.

TEOREMA.

45. *Il seno della somma di due archi è quanto la somma de' due prodotti, che si hanno moltiplicando vicendevolmente il seno dell'uno per lo coseno dell'altro, posto il raggio uguale ad 1.*

E il seno della differenza di essi archi è quanto la differenza di que' prodotti stessi.

Sieno dinotati da ϕ e θ gli archi proposti, de' quali ϕ sia il maggiore; e ciascuno suppongasi minore del quadrante. Nella circonferenza ABD del raggio 1, dal

fig. 2.

medesimo punto A, s' intendano presi gli archi AB, AD, l'un de' quali sia il doppio dell' arco φ, e l'altro di θ; e tirato per A il diametro AR, si giungano le AB, BR, AD, DR, BD: è chiaro, che la corda AB sia il doppio del seno della metà dell' arco contèrmine AB, cioè quanto 2.sen.φ, e che AD sia quanto 2.sen.θ. Similmente le RB, RD saranno respettivamente quanto 2.sen. $(90^\circ - \varphi)$ e 2.sen. $(90^\circ - \theta)$, cioè quanto 2.cos.φ e 2.cos.θ.

Or per lo quadrilatero ABRD inscritto nel *divisato* cerchio, è

$$BD \times AR = AB \times DR + AD \times RB$$

ossia, prendendo la metà di ciascuna di queste rette, e poi passando da esse alle linee trigonometriche che si è quì sopra veduto dinotarne, sarà

$$\text{sen.}(\varphi + \theta) = \text{sen.}\varphi \cos.\theta + \text{sen.}\theta \cos.\varphi.$$

Inoltre prendasi l' arco Ad uguale ad AD, e si giungano pure le corde Ad, dB, dR, sarà di nuovo, pel quadrilatero $AdBR$ inscritto in quel cerchio,

$$Bd \times AR = AB \times Rd - Ad \times RB.$$

E ripiegando dalle metà di queste corde a' seni e coseni degli archi φ, θ da esse rappresentati, si vedrà essere

$$\text{sen.}(\varphi - \theta) = \text{sen.}\varphi \cos.\theta - \text{sen.}\theta \cos.\varphi.$$

E perciò il seno della somma di due archi, ec. C. B. D.

46. *Cor.* 1. Se l' arco θ fosse uguale all' altro φ, l'equazione di sopra ritrovata per sen. $(\varphi+\theta)$ si trasmuterebbe, pel seno dell' arco doppio, nella seguente

$$\text{sen.}2\varphi = 2.\text{sen.}\varphi \cos.\varphi$$

ch' è identica alla di già ritrovata nel §. 42.

47. *Cor.* II. Suppongasi l'arco φ di 60°; e l'altro θ non maggiore di 30°; e riflettendo che il coseno di 60°, cioè sen. 30° = 1/2 *, le due formole di sopra assegnate per sen.($\varphi + \theta$), e sen.($\varphi - \theta$) si trasmuteranno nelle qui appresso, cioè * 36.

$$\text{sen.}(60^\circ+\theta) = \text{sen.}60^\circ \cos.\theta + 1/2 \text{ sen.}\theta$$
$$\text{sen.}(60^\circ-\theta) = \text{sen.}60^\circ \cos.\theta - 1/2 \text{ sen.}\theta$$

e sottraendo la seconda di esse dalla prima, si avrà

$$\text{sen.}(60^\circ + \theta) - \text{sen.}(60^\circ-\theta) = \text{sen.}\theta$$

onde $$\text{sen.}(60^\circ + \theta) = \text{sen.}\theta + \text{sen.}(60^\circ-\theta)$$

Aduuque: *Il seno di un arco maggiore di* 60° *è quanto la somma di due seni, uno dell'eccesso dell'arco proposto su quello di* 60°, *e l'altro della differenza tra l'arco di* 60°, *e l'eccesso poc'anzi detto.*

PROPOSIZIONE VIII.

TEOREMA.

48. *Il coseno della somma di due archi è quanto il prodotto de' coseni di essi archi, toltone quello de' loro seni. E 'l coseno della differenza di due archi pareggia la somma de' prodotti poc'anzi detti.*

Sieno come nel Teor. precedente φ e θ gli archi proposti, ed AB, AD i loro doppj presi nel cerchio del raggio 1. Per gli estremi A, D del minor arco AD conducansi nel cerchio i diametri AR, DH; e congiuntevi le corde AB, AD, BD, si tirino le loro supplementali BR, AH, BH. Sarà pel quadrilatero ABHR inscritto in questo cerchio fig. 9.

$$BH \times AR = BR \times AH - AB \times RH$$

E passando dalla metà di queste corde a' respettivi seni e coseni degli archi φ e θ, con osservare che l'arco RH uguale all'altro AD, sarà

$$\cos.(\varphi + \theta) = \cos.\varphi \cos.\theta - \text{sen.}\varphi \text{ sen.}\theta.$$

Or preso l'arco $Ad = AD$, similmente per gli estremi A, d di questo si conducano nel detto cerchio i diametri AR, dh, e si tirino benanche le corde degli archi AB, Ad, Bd, e quelle de'supplementi loro. Sarà manifesto essere l'arco Rh uguale all'altro Ad. E per lo quadrilatero ABRh inscritto nel divisato cerchio dovrà essere

$$Bh \times AR = RB \times Ah + AB \times Rh.$$

E passando dalle corde a' seni ed a' coseni di cui esse sono i doppj, sarà

$$\cos.(\varphi - \theta) = \cos.\varphi \cos.\theta + \text{sen.}\varphi \text{ sen.}\theta$$

Laonde il coseno della somma di due archi ec. C.B.D.

49. *Cor.* Ponendo nella prima delle formole del presente Teor. $\varphi = \theta$, si avrà

$$\cos.2\varphi = \cos.^2\varphi - \text{sen.}^2\varphi.$$

la qual formola pel coseno dell'arco doppio paragonata con quella che si ottenne nel §. 44. dà

$$\cos.^2\varphi + \text{sen.}^2\varphi = 1$$

come fu dimostrato nel §. 35.

SCOLIO

Per le due precedenti Proposizioni.

50. Sebbene le formole quassù recate pel seno e coseno di un arco, che sia la somma o la differenza di due dati, si trovino dimostrate nel caso che ciascuno di questi archi sia minore del quadrante: esse pe-

rò, per mezzo di quanto fu stabilito nel Cap. III., possonsi agevolmente estendere a due archi qualunque, che, per le più generali considerazioni trigonometriche, basterebbe che fossero rappresentati da $90^o+\phi$ e $90^o+\theta$.

In effetto s' incominci dal supporre, che un solo di questi archi sia $90^o+\phi$, e l' altro continui tuttavia ad esser θ, sarà $\text{sen.}(90^o+\phi) = \cos.\phi$, $\cos.(90^o+\phi) = -\text{sen.}\phi$, e

$$\text{sen.}(90^o+\phi+\theta) = \pm \cos.(\phi+\theta)$$

(il segno + ha luogo quando l'arco $\phi+\theta$ è minore del quadrante l' altro — quando n' è maggiore).

$$\text{sen.}(90^o+\phi-\theta) = \cos.(\phi-\theta)$$

E sviluppando i secondi membri di questi due ultime equazioni, e poi sostituendo per $\cos.\phi$ e $\text{sen.}\phi$ le loro equivalenti espressioni poc' anzi indicate, si avrà

$$\text{sen.}(90^o+\phi+\theta) = \pm (\text{sen.}(90^o+\phi)\cos.\theta + \text{sen.}\theta\cos.(90^o+\phi))$$

$$\text{sen.}(90^o+\phi-\theta) = \ldots \text{sen.}(90^o+\phi)\cos.\theta - \text{sen.}\theta\cos.(90^o+\phi)$$

Cioè dinotando con α l' arco $90^o+\phi$, sarà

$$\text{sen.}(\alpha+\theta) = \pm (\text{sen.}\alpha\cos.\theta + \text{sen.}\theta\cos.\alpha)$$

$$\text{sen.}(\alpha-\theta) = \ldots \text{sen.}\alpha\cos.\theta - \text{sen.}\theta\cos.\alpha$$

Similmente essendo

$$\cos.(90^o+\phi+\theta) = -\text{sen.}(\phi+\theta)$$
$$\cos.(90^o+\phi-\theta) = -\text{sen.}(\phi-\theta)$$

facendo le stesse operazioni e sostituzioni di poc' anzi, si avrà finalmente

$$\cos.(\alpha \pm \theta) = \ldots \cos.\alpha\cos.\theta \mp \text{sen.}\alpha\,\text{sen.}\theta$$

Or suppongasi anche l' altro arco divenirne $90^o+\theta$,

che dinoteremo per β, sarà pure sen.$(90^o+\theta) = \cos.\theta$, e ccs.$(90^o+\theta) = -\text{sen}.\theta$. Ed è poi

$$\text{sen.}\big((90^o+\varphi)+(90^o+\theta)\big) = \text{sen.}(180^o+\varphi+\theta) = \text{sen.}(\varphi+\theta)$$

$$\text{sen.}\big((90^o+\varphi)-(90^o+\theta)\big) = \ldots\ldots\ldots \text{sen.}(\varphi-\theta)$$

$$\cos.\big((90^o+\varphi)+(90^o+\theta)\big) = \cos.(180^o+\varphi+\theta) = \mp \cos.(\varphi+\theta)$$

(secondochè l'arco $\varphi+\theta$ è minore del quadrante, o pur maggiore).

$$\cos.\big((90^o+\varphi)-(90^o+\theta)\big) = \ldots\ldots\ldots \cos.(\varphi-\theta)$$

Nelle quali quattro ultime equazioni eseguendo gli sviluppi de' secondi membri di esse, e poi le sostituzioni in vece di sen.φ, cos.φ, sen.θ, cos.θ delle loro equivalenti espressioni recate più sopra, si verranno ad avere i seni e coseni indicati ne' primi membri delle medesime, co' loro proprj segni.

E tal dimostrazione potrebbesi nel modo stesso continuare in appresso, sicchè poi indicando con A, e B due archi qualunque, dovrà essere in generale.

$$\text{sen.}(A \pm B) = \text{sen.}A \cos.B \pm \text{sen.}B \cos.A$$
$$\cos.(A \pm B) = \cos.A \cos.B \mp \text{sen.}A \text{ sen.}B$$

Avvertendo sempre, perchè i risultamenti sieno affetti dal loro proprio segno, che debbesi tener conto de' segni che appartengonsi a' seni e coseni degli archi dati.

PROPOSIZIONE III.

TEOREMA.

56. *La tangente della somma di due archi è quanto la somma delle tangenti di essi divisa pel raggio minorato del prodotto di quelle tangenti.*

E la tangente della loro differenza è quanto la differenza delle tangenti di essi divisa pel raggio accresciuto del prodotto delle medesime tangenti.

Essendo $\text{sen.}(\varphi+\theta) = \text{sen.}\varphi\cos.\theta+\text{sen.}\theta\cos.\varphi$ e . . . . . $\cos.(\varphi+\theta) = \cos.\varphi\cos.\theta-\text{sen.}\varphi\,\text{sen.}\theta$ dividendo l' una equazione per l' altra, e sostituendo al quoziente de' primi membri $\text{tang.}(\varphi+\theta)$, si avrà

$$\text{tang.}(\varphi+\theta) = \frac{\text{sen.}\varphi\cos.\theta+\text{sen.}\theta\cos.\varphi}{\cos.\varphi\cos.\theta-\text{sen.}\varphi\,\text{sen.}\theta}$$

E dividendo il numeratore e denominatore di questo fratto per $\cos.\varphi\cos.\theta$, e sostituendo sempre al quoziente del seno per lo coseno di un arco la tangente di questo, si avrà

$$\text{tang.}(\varphi+\theta) = \frac{\text{tang.}\varphi+\text{tang.}\theta}{1-\text{tang.}\varphi\times\text{tang.}\theta}$$

E similmente dalle formole esprimenti il seno e il coseno della differenza di due archi si sarebbe ottenuto

$$\text{tang.}(\varphi-\theta) = \frac{\text{tang.}\varphi-\text{tang.}\theta}{1+\text{tang.}\varphi\times\text{tang.}\theta}$$

Che perciò la tangente della somma di due archi, ec. C.B.D.

51. *Cor.* Supponendo nell'espressione di tang.$(\varphi+\theta)$, esser $\varphi=\theta$, si avrà

$$\text{tang.}2\varphi = \frac{2.\text{ tang. }\varphi}{1 - \text{tang.}^2\varphi}$$

ch' è l'espressione della tangente dell'arco doppio.

PROPOSIZIONE X.

TEOREMA.

52. *Ritrovare il seno dell'arco di* $1'$.

I poligoni regolari di 16384 lati iscritto, e circoscritto ad un cerchio del raggio 1, con un approssimazione portata fino a 15 cifre decimali, sono rispettivamente espressi da 3, 141592576586860, e 3, 141592692091258, come può rilevarsi nella maniera prescritta nelle Prop. 1, e 2 della Misura del cerchio. (*Corso di Geometr. vol.* II.). Ciò posto siccome questi poligoni essendo simili sono proporzionali a' quadrati delle perpendicolari, che dal centro del cerchio si abbassano sopra due loro dati, delle quali quella che cade sul lato del poligono circoscritto è il raggio del cerchio; perciò sarà 3, 141592692091258 a 3, 141592576586860, come il quadrato del raggio, al quadrato della perpendicolare che cade dal centro su di un lato del poligono iscritto. Quindi se si determini questo quarto proporzionale, e poi da esso si estragga la radice quadrata, si avrà tal perpendicolare in parti del raggio. Or perchè il poligono iscritto è uguale al rettangolo contenuto dal suo perimetro, e dalla metà della perpendicolare poc' anzi determinata; perciò se il numero 3, 141592576586860 si divida per l'altro che dinota la metà della perpendicolare poc' anzi ritrovata, il quoziente darà il perimetro

di esso poligono (*Note alla Mis. del Cerc. Prop.* 1.), il quale si troverà espresso da 6, 283185278837425. Ed in simil guisa, dividendo, il numero ch' esprime il poligono circoscritto per 1/2; cioè per la metà del raggio, si determinerà il perimetro di quest' altro poligono, che sarà 6, 283185364182256. Laonde dividendo ciascun di questi due numeri per 16384, numero de' lati di ciascuno di tali poligoni, i quozienti 0, 000383495 1, e 0, 000383495 2, i quali non differisconsi, che nella 10.ma cifra decimale solamente, rappresenteranno due lati di essi. Adunque l' arco di cerchio, ch' è sotteso da un lato del poligono di 16384 lati differiscesi dalla sua corda per meno che $\frac{1}{10000000000}$ del raggio; e per conseguenza un tal arco, e la sua corda, con un' approssimazione assai più che sufficiente per gli ordinarj usi trigonometrici, potranno prendersi per uguali. Ma quest' arco è precisamente di $1'$, $19''$, $6'''$, $5''''$, $37'''''$, $30''''''$, come può vedersi dividendo la circonferenza, e quindi 360ª per metà, tante volte, quando se ne richiede per prevenire a 16384 parti, cioè 14. volte (*Prop.* 1 *mis. del cerch.*). Dunque con più ragione potrà supporsi, che si confonda colla corda contermine l' arco di $1'$; e perciò potrà stabilirsi la seguente proporzione, l' arco di $1'$, $19''$, $6'''$, $5''''$, $37'''''$, $30''''''$ all' arco di $1'$, come la corda di quello, cioè 0,000383495 1 alla corda di $1'$; della quale presane la metà, si avrà il seno dell' arco di mezzo minuto; e da questo se ne dedurrà poi quello di $1'$ *. C.B.F. * 46.

53. *Cor.* Nel prendere il valore del seno dell' arco di $1'$ da quello di mezzo minuto primo, cioè $30''$, servendosi dell' espressione sen. $1' = 2.\text{sen.}30'' \cos.30''$, è facile il vedere, che $\cos.30''$ sia presso che uguale al raggio, cioè ad 1: che perciò sen. $1' = 2.\text{sen.}30''$.

Vale a dire, che si può a dirittura prendere per seno di 1′ la corda di quest'arco.

PROPOSIZIONE XI.

TEOREMA.

54. *Esporre co' principj precedenti l'effettiva formazione del Canone Trigonometrica.*

Per la Prop. prec. può ritrovarsi il valore numerico di sen.1′. E supposto, come al solito, il raggio trigonometrico = 1, per la Prop. 4. si renderà noto cos.1′. Inoltre per lo Cor. 1 della Prop. 7 si determini sen.2′. Ciò posto, sarà, per lo Cor. della Prop. 6, sostituendo a ϕ l'arco di 1′, e perciò a 2ϕ, 3ϕ ec. quelli di 2′, 3′ ec.

sen.3′ = 2.cos.1′ sen.2′ — sen.1′
sen.4′ = 2.cos.1′ sen.3′ — sen.2′
sen.5′ = 2.cos.1′ sen.4′ — sen.3′
sen.6′ = 2.cos.1′ sen.5′ — sen.4′
ec.

Questa operazione, che potrebbe estendersi insino all'arco di 90°, cioè effettuandola per 5400 archi, che vadano successivamente crescendo di 1′, si arresti all'arco di 60°; e poi per lo Coroll. 2. Prop. 7, e con più agevol calcolo si rinverranno

sen.(60°+1′) = sen.(59°+59′) + sen.1′
sen.(60°+2′) = sen.(59°+58′) + sen.2′
. . . . . .
. . . . . .
sen.61° = sen.59° + sen.1°
sen.62° = sen.58° + sen.2°
ec.

Ritrovati i seni degli archi di un quadrante, i quali si sogliono distribuire in due colonne verticali, una contenente i seni fino a 45°, e l'altra, che comprende i coseni di questi archi, cioè i seni da 89°+59′ a 45°, si potranno calcolare le loro tangenti, e seganti, colle analogie del n.° 19.

Ed ecco esposto il modo di costruire con sole operazioni della volgare aritmetica il canone lineare.

55. *Scol.* Siccome nell' uso ordinario di questo canone per la risoluzione de' triangoli, imbarazzerebbero non poco le lunghissime multiplicazioni e divisioni, che convien fare; perciò i trigonometri hanno pensato di aggiungere al canone lineare i logaritmi corrispondenti a' numeri in esso contenuti; vale a dire hanstabilito un'altra specie di canone, che dicesi *logaritmico*, e ch'è quello di cui si fa uso. Ed in alcune Tavole si trova a dirittura rapportato il solo canone logaritmico, trascurandosi il lineare. Intanto sarebbe assolutamente superfluo il dir qui qualche cosa circa il canone logaritmico; poichè questo trovasi a sufficienza spiegato innanzi alle ordinarie *Tavole de' seni*, ed è facilissimo l'intenderlo a chi non ignora l'ordinaria teorica de' logaritmi volgari.

CAP. V.

Formole circolari, che deduconsi dalle prop. VII, VIII, e da' loro corollarj.

56. Dalle formole rappresentanti il seno, e 'l coseno della somma, e della differenza di due archi se ne possono ricavare molte espressioni trigonometriche utilissime, delle quali noi quì appresso recheremo le principali, che sono di un uso più frequente, e di alcune delle quali dovremo anche valerci a proposito in appresso nel presente Trattato.

57. In primo luogo, se per mezzo della Prop. VII. si cerchi l'espressione corrispondente a sen.$(n\phi+\phi)$, ed a sen.$(n\phi-\phi)$, cioè a sen.$(n+1)\phi$, ed a sen.$(n-1)\phi$, si rileverà che debbano aver luogo le seguenti due equazioni

$$\text{sen.}(n+1)\phi = \text{sen.}n\phi\ \text{cos.}\phi + \text{sen.}\phi\ \text{cos.}n\phi$$

$$\text{sen.}(n-1)\phi = \text{sen.}n\phi\ \text{cos.}\phi - \text{sen.}\phi\ \text{cos.}n\phi$$

la quali sommate insieme danno

$$\text{sen.}(n+1)\phi + \text{sen.}(n-1)\phi = 2.\text{sen.}n\phi\ \text{cos.}\phi$$

cioè, sen.$(n+1)\phi$ = 2.sen.$n\phi$ cos.ϕ − sen.$(n-1)\phi$

la quale equazione dà il seno dell' arco *multiplice* $n+1$ di un dato, per mezzo de' seni degli archi *multiplici* n, $n-1$ dello stesso, e del coseno dell' arco semplice. Ed essa coincide col Teorema delle corde dimostrato nel Cor. della Prop. VI.

Similmente dalla Prop. VIII. si rileverà, che debba essere

$$\text{cos.}(n+1)\phi = \text{cos.}n\phi\ \text{cos.}\phi - \text{sen.}n\phi\ \text{sen.}\phi$$

$$\text{cos.}(n-1)\phi = \text{cos.}n\phi\ \text{cos.}\phi + \text{sen.}n\phi\ \text{sen.}\phi$$

dalle quali si otterrà per mezzo della loro somma

$$\cos.(n+1)\phi = 2.\cos.n\phi\ \cos.\phi - \cos.(n-1)\phi$$

la quale equazione dà il coseno di un arco *multiplice* $n+1$ di un dato per mezzo de' coseni di due archi *multiplici* n ed $n-1$ del medesimo e del coseno di questo. Ed essa coincide con l'altro Teorema dimostrato nello Scolio al n.° 44.

58. Dal §. 4o. si ha

$$\cos.^2\phi = \frac{1+\cos.2\phi}{2} \quad \ldots\ldots\ldots \text{M}$$

equazione che combinata con l'altra

$$\text{sen.}^2\phi = 1 - \cos.^2\phi$$

darà

$$\text{sen.}^2\phi = \frac{1-\cos.2\phi}{2} \quad \ldots\ldots\ldots \text{N}$$

e questa, e la prima M risoluta per rispetto a cos.ϕ e sen.ϕ daranno

$$\cos.\phi = \sqrt{\frac{1+\cos.2\phi}{2}}$$

$$\text{sen.}\phi = \sqrt{\frac{1-\cos.2\phi}{2}}$$

che sono le espressioni del seno, e coseno dell'arco metà, date le stesse linee trigonometriche per l'arco doppio.

Che se l'equazione

$$\text{sen.}2\phi = 2.\text{sen.}\phi\ \cos.\phi \qquad * 46.$$

si combini prima con l'altra M, e poi con N, se ne ricaveranno queste altre due, cioè

$$\frac{\text{sen.}2\phi}{1+\cos.2\phi} = \frac{\text{sen.}\phi}{\cos.\phi} = \text{tang.}\phi$$

$$\frac{\text{sen.}2\phi}{1-\cos.2\phi} = \frac{\cos.\phi}{\text{sen.}\phi} = \cot.\phi$$

che, com'è chiaro, rappresentano la tangente, e la

cotangente dell' arco metà espresse nel seno, e coseno dell' arco doppio.

60. Le formole finora recate possono bastare per far conoscere i principj per la costruzione algebrica del canone trigonometrico; ed apparterrà all' analisi trascendente l' estenderli, ed il renderli sì efficaci, ed agevoli per la costruzione delle Tavole, da dar risultamenti di un' approssimazione sì grande, che ecceda i limiti del bisognevole ne' calcoli più accurati, che dipendono dalla Trigonometria e dalle Tavole; ma non è questo il luogo a proposito per esporre tali cose.

61. Dalle quattro formole de' numeri 45 e 48 se ne possono ricavare le seguenti altre, che sono come tanti Teoremi.

I. $\text{sen.}(\varphi+\theta)+\text{sen.}(\varphi-\theta) = 2.\text{sen.}\varphi\ \text{cos.}\theta$

II. $\text{sen.}(\varphi+\theta)-\text{sen.}(\varphi-\theta) = 2.\text{cos.}\varphi\ \text{sen.}\theta$

III. $\text{cos.}(\varphi+\theta)+\text{cos.}(\varphi-\theta) = 2.\text{cos.}\varphi\ \text{cos.}\theta$

IV. $\text{cos.}(\varphi-\theta)-\text{cos.}(\varphi+\theta) = 2.\text{sen.}\varphi\ \text{sen.}\theta$

62. Or se si ponga $\varphi+\theta = \alpha$, $\varphi-\theta = \beta$; e quindi $\varphi = \frac{\alpha+\beta}{2}$, $\theta = \frac{\alpha-\beta}{2}$: e poi questi valori di φ, e θ sostituiscansi nelle precedenti formole, esse si ridurranno a queste altre.

V. $\text{sen.}\alpha+\text{sen.}\beta = 2.\text{sen.}\frac{\alpha+\beta}{2}\ \text{cos.}\frac{\alpha-\beta}{2}$

VI. $\text{sen.}\alpha-\text{sen.}\beta = 2.\text{cos.}\frac{\alpha+\beta}{2}\ \text{sen.}\frac{\alpha-\beta}{2}$

VII. $\text{cos.}\alpha+\text{cos.}\beta = 2.\text{cos.}\frac{\alpha+\beta}{2}\ \text{cos.}\frac{\alpha-\beta}{2}$

VIII. $\text{cos.}\beta-\text{cos.}\alpha = 2.\text{sen.}\frac{\alpha+\beta}{2}\ \text{sen.}\frac{\alpha-\beta}{2}$

63. E dividendo le due formole n.° V. e VI. per l' altra n.° VII., si avrà

IX. $\frac{\text{sen.}\alpha + \text{sen.}\beta}{\cos.\alpha + \cos.\beta} = \frac{\text{sen.}\frac{1}{2}(\alpha+\beta)}{\cos.\frac{1}{2}(\alpha+\beta)} = \text{tang.}\frac{\alpha+\beta}{2}$

X. $\frac{\text{sen.}\alpha - \text{sen.}\beta}{\cos.\alpha + \cos.\beta} = \frac{\text{sen.}\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}{\cos.\frac{1}{2}(\alpha-\beta)} = \text{tang.}\frac{\alpha-\beta}{2}$

64. E similmente dividendo l' equazione IX. per la X., si avrà

XI. $\frac{\text{sen.}\alpha + \text{sen.}\beta}{\text{sen.}\alpha - \text{sen.}\beta} = \frac{\text{tang.}\frac{1}{2}(\alpha+\beta)}{\text{tang.}\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}$

E da questa si ricava la seguente analogia

$\text{sen.}\alpha+\text{sen.}\beta : \text{sen.}\alpha-\text{sen.}\beta :: \text{tang.}\frac{\alpha+\beta}{2} : \text{tang.}\frac{\alpha-\beta}{2}$

Cioè: *La somma de' seni di due archi sta alla loro differenza, come la tangente della semisomma di essi archi alla tangente della semidifferenza loro.*

65. Inoltre ponendo nell'espressione del seno dell' arco doppio*, $\frac{\alpha+\beta}{2}$ invece di φ, si otterrà *46.

XII. $\text{sen.}(\alpha+\beta) = 2.\text{sen.}\frac{\alpha+\beta}{2}\cos.\frac{\alpha+\beta}{2}$.

66. Finalmente dividendo ciascuna delle equazioni n.° V. e VI. per questa XII., e poi riducendo, si avrà

XIII. $\frac{\text{sen.}\alpha + \text{sen.}\beta}{\text{sen.}(\alpha+\beta)} = \frac{\cos.\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}{\cos.\frac{1}{2}(\alpha+\beta)}$

XIV. $\frac{\text{sen.}\alpha - \text{sen.}\beta}{\text{sen.}(\alpha+\beta)} = \frac{\text{sen.}\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}{\text{sen.}\frac{1}{2}(\alpha+\beta)}$

E dalle formole quì recate i giovani potranno per loro esercizio ricavarne facilmente molte altre, che per brevità quì si tralasciano.

ELEMENTI

DI

TRIGONOMETRIA.

LIBRO II.

PRINCIPJ DI TRIGONOMETRIA RETTILINEA.

INTRODUZIONE.

67. In ogni triangolo, oltre allo spazio che vi si contiene, vi sono pure, come l'è noto, tre lati e tre angoli; e queste sei grandezze hanno tra loro tal nesso, che da tre di esse date, se pur queste non sieno i soli angoli della figura, si possono le altre geometricamente ed in facil modo rilevare, come si ha dagli Elementi di Euclide. Ma non è così di loro, quando con valori aritmetici le une si espongono, e nella stessa divisa le altre vi si chieggon da esse. Imperocchè essendo trascendente il rapporto de' lati di un triangolo agli angoli ch' essi sottendono, niuna regola per l'indagine suddetta può mai sperarsi. Ad ottenere quindi la risoluzione del triangolo sulla quale sono fondate le scienze geodetiche, ed astronomiche, e della quale grandissimo uso bisogna pur fare nelle matema-

tiche sì pure che miste, i Geometri antichi inventarono il seguente ripiego.

Essi costruivano prima il canone trigonometrico, che, come si è veduto nel libro precedente, presenta una tavola di corrispondenza tra i valori degli angoli e quelli delle di loro *funzioni*, cioè delle corrispondenti linee trigonometriche; e poi prescrissero certi rapporti di quelle funzioni a' lati di un triangolo, dal che poi la risoluzione di questa figura riesciva facilissima a rilevarsi. Ed è della fissazione di questi rapporti, e della maniera di applicarli all' oggetto cui sono destinati, che passeremo ad occuparci nel presente libro.

Intanto è da avvertirsi, che i risultamenti de' problemi trigonometricamente risoluti sono approssimanti, come approssimanti sono i valori delle linee trigonometriche che vi si adoperano, e per le operazioni aritmetiche che su di queste si fanno. Ed è dà dolersi che nella maggior parte delle Trigonometrie Elementari siasi trascurato di ciò avvertire a' giovanetti, non senza loro nocumento. Imperocchè nella parte elementare della Geometria, e nella sublime non si contemplano che le sole grandezze geometriche, e con metodi esatti e rigorosi tutto vien quivi rilevato, proposto, e dimostrato; laddove nella Trigonometria rinvengonsi certe grandezze continue in valori aritmetici, e con metodi approssimanti risolvonsi i problemi. Ed i giovani passan di volo dall' un metodo all' altro, e da questo a quello ne ripiegano, ora contemplando le grandezze continue nella loro natura, ed ora sotto la mentita forma di discrete, e spesso non v' è chi di quel divario gli avverta. Era dunque necessario, non solo per ragion di scienza; ma per utile de' giovani, premetter queste nozioni agli Elementi di Trigonome-

tria, che quì imprendo a divisare brevemente e con chiarezza.

68. *Def.* I. I valori numerici de' lati, e degli angoli di un triangolo si possono chiamare *parti* di esso. E ciò secondo le frase de' Trigonometri antichi.

69. *Def.* II. *Risolvere un triangolo* è il ritrovare tre delle sei parti del triangolo dalle altre tre che sieno date; se pur queste non sieno i soli tre angoli di tal figura.

70. *Cor.* Quando sieno dati i soli tre angoli di un triangolo non si potrà da essi investigare il valore de' lati, ma semplicemente la di loro proporzione. Imperocchè esso in tal caso sarà dato di sola specie, e potrà averne infiniti altri equiangoli.

71. *Def.* III. La Trigonometria Piana, o rettilinea è la scienza, che propone le regole, o principj per risolvere un triangolo.

CAP. I.

PRINCIPJ PER LA RISOLUZIONE DE' TRIANGOLI.

PROPOSIZIONE I.

TEOREMA.

72. *L' ipotenusa di un triangolo rettangolo sta a ciascun lato di esso, come il raggio trigonometrico al seno dell' angolo opposto ad un tal lato.*

fig. 10. Imperocchè descrivasi col centro A intervallo AB l' arco circolare BD, rappresenterà BC il seno dell' arco BD, o sia dell' angolo BAC, e CA ne sarà il coseno, o sia il seno di CBA, ch' è complemento di
* 30. CAB. Adunque starà AB: BC :: R: sen. BAC*; ed AB: AC :: R: sen. CBA, ossia a cos. BAC.

73. *Cor.* E dalle due precedenti analogie si rileverà facilmente che debba stare

BC: CA :: sen.BAC: sen.CBA, o a cos.BAC.

PROPOSIZIONE II.

TEOREMA.

74. *In un triangolo rettangolo sta pure un lato all' altro, come il raggio trigonometrico alla tangente dell' angolo opposto all' altro lato.*

Ed un lato sta all' ipotenusa, come il raggio trigonometrico alla segante dell' angolo adjacente.

fig. 10. Poichè se descrivasi col centro A, intervallo AC

l'arco circolare CE ; è chiaro che CB dinoti la tangente dell'arco CE, e quindi dell'angolo in A, e che AB rappresenti la segante di quell'arco, o di quest'angolo. Laonde dovrà stare

AC : CB : : R : tang. A

AC : AB : : R : seg. A

e queste sono le due analogìe proposte nel presente Teorema. C.B.D.

PROPOSIZIONE III.

TEOREMA.

75. *In ogni triangolo i lati sono come i seni degli angoli ad essi opposti.*

Dal vertice A di uno degli angoli del triangolo ABC si abbassi sul lato opposto la perpendicolare AD, si avrà nel triangolo rettangolo BAD, BA : AD : : R : sen.B*, e quindi R × AD = BA × sen.B. [fig. 11.] * 72.

E similmente si ricaverà dal triangolo CAD esser R × AD = CA × sen. C ; Laonde dovrà risultare BA × sen. B = CA × sen. C ; e quindi, considerando i seni come linee rette, si vedrà esser* * 14. VI.

CA : BA : : sen. B : sen. C.

E nel modo stesso abbassando da B la perpendicolare sul lato AC si dimostrerà che sia

BA : BC : : sen. C : sen. A.

Quindi, per equalità, se ne conchiuderà anche

CA : BC : : sen. B : sen. A.

Che perciò in ogni triangolo ec. C.B.D.

PROPOSIZIONE IV.

TEOREMA.

76. *Se dal vertice di un angolo di un triangolo si abbassi la perpendicolare sul lato opposto, dovrà star quel lato su cui cade la perpendicolare, alla somma degli altri due lati del triangolo, come la differenza di questi, alla differenza, o pure alla somma de' segmenti formati dalla perpendicolare, secondo che questa cade dentro, o fuori del triangolo.*

fig. 12. e 13. Dal vertice A del triangolo BAC si abbassi sul lato opposto BC la perpendicolare AD, la quale cade dentro del triangolo nella figura 12, e fuori nell' altra 13; dovrà stare BC: BA + AC :: AC—AB : CD $\mp$ DB, ove il segno — del quarto termine della proporzione ha luogo se la perpendicolare cade dentro del triangolo, e l' altro + se cade fuori di esso.

Col centro A, intervallo il minore AB degli altri due lati, si descriva il circolo EBF, che interseghi l' altro lato AC in F, E, ed il lato CB in *b*.

Ciò permesso, per la natura del cerchio, il rettangolo ECF è uguale all' altro BC*b*: adunque sarà BC : CE, o CA + AB :: CF, o CA — AB : C*b*; e questa C*b* per la figura 12. è quanto CD — DB, e per l' altra 13. è quanto CD + D*b*.

Adunque ec. C. B. D.

PROPOSIZIONE V.

TEOREMA.

77. *In ogni triangolo obbliquangolo il coseno di un angolo è uguale alla quantità che si ottiene dalla somma de' quadrati de' lati che lo comprendono, meno quello del lato che gli è opposto, divisa pel doppio rettangolo di que' lati stessi.*

Cioè nel triangolo BAC, per un angolo qualunque di esso, come per esempio quello in A deve essere fig. 141.

$$\text{cos. BAC} = \frac{AB^2+AC^2-BC^2}{2BA \times AC}$$

Imperocchè se dal vertice B di uno degli altri angoli del triangolo si abbassi sul lato opposto la perdicolare BD, sarà $BC^2 = BA^2 + AC^2 \mp 2CA \times AD$, secondo che l'angolo BAC è acuto, o ottuso. E poichè sta

$$1 : \text{cos. BAD} :: BA : AD,$$

sarà

$$AD = \text{cos. BAD} \times BA$$

e perciò

$$BC^2 = BA^2 + AC^2 \mp 2BA \times AC \times \text{cos. CAD}.$$

Or nel caso che l'angolo BAC sia ottuso, è cos.BAD $= -$ cos. BAC; che perciò ne' due casi si avrà sempre $BC^2 = BA^2 + AC^2 - 2BA \times AC \times$ cos. BAC; e quindi

$$\text{cos. BAC} = \frac{BA^2+AC^2-BC^2}{2BA \times AC}$$

Che perciò in ogni triangolo ec. C.B.D.

SCOLIO.

78. Indicando generalmente per A, B, C i tre angoli di un triangolo, e per a, b, c i lati che gli sono opposti, sarà

$$\cos. A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

e questa espressione potrà porsi anche sotto l'altra forma

$$\frac{(b+c)^2 - a^2}{2bc} - 1$$

che riducesi a

$$\frac{(b+c+a)(b+c-a)}{2bc} - 1$$

la quale riesce più agevole nel calcolo de' triangoli

Inoltre sostituendo $2\cos.^2 1/2\ A - 1$ in luogo di
* 58. $\cos. A^2$, si avrà

$$2.\cos.^2 1/2\ A = \frac{(b+c+a)(b+c-a)}{2bc}$$

e quindi $\cos. 1/2\ A = 1/2 \sqrt{\left(\frac{(b+c+a)(b+c-a)}{bc}\right)}$

che nel calcolo è anche più agevole della precedente.

Finalmente volendo l'espressione di sen. 1/2 A piuttosto che del coseno, basterà nella formola di cos. A, che risulta immediatamente dal Teorema, sostituire
* 58. $1 - 2.\text{sen.}^2 1/2\ A$ in luogo di $\cos. A^2$, si avrà così

$$1 - 2.\text{sen.}^2 1/2\ A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

cioè: $\text{sen.}^2 1/2\ A = \frac{a^2 - (b-c)^2}{4bc}$

e quindi $\text{sen. } 1/2\ A = 1/2 \sqrt{\left(\frac{(a+b-c)(a+c-b)}{bc}\right)}$

PROPOSIZIONE VI.

TEOREMA.

79. *In ogni triangolo la somma de' lati è alla loro differenza, come la tangente della semisomma degli angoli alla base, alla tangente della semidifferenza di essi.*

Si circonscriva al triangolo ACB il cerchio, e dal fig. 15. centro O di questo si tirino i raggi OG, OF perpendicolari ai lati AC, AB, e congiunto l'altro raggio OA, gli si abbassino dai punti G, F le perpendicolari GL, FH, che sono i seni degli angoli GOA, AOF, finalmente si unisca la GF, e gli si abbassi dal centro O la perpendicolare OM. E poichè l'angolo GOA è uguale all'angolo CBA, mentre l'arco GA su cui insiste il primo, ch'è al centro O del cerchio, è metà dell'arco AGC su cui insiste l'altro, che sta alla circonferenza del cerchio stesso; e l'angolo AOF è uguale a BCA, per la medesima ragione: perciò sarà l'angolo GOF quanto la somma degli angoli B, C; e quindi l'angolo GOM, ch'è metà dell'angolo GOF sarà la semisomma degli angoli B, C. Di più essendo l'angolo GOK = GOM + MOK, sarà esso uguale ad FOM + MOK, cioè = FOK + 2KOM; e perciò GOK — KOF = 2KOM: quindi KOM sarà la semidifferenza degli angoli GOK, KOF ossia B, C.

Or essendo simili i triangoli GKL, FKH, sta GK: KF :: GL: FH. Ma GL, ed FH sono seni degli archi GA, ed AF, e quindi degli angoli in B, C; e perciò proporzionali a' lati AC, AB, opposti ad essi*. * 75.

Adunque sarà GK : KF :: CA : AB ; e componendo GF : FK :: CA + AB : AB; e poi col dividendo, ed invertendo applicato a quella stessa analogia, si avrà KF : GK—KF :: AB : AC—AB. Laonde, per equalità, dovrà stare GF : GK—KF :: CA + AB : CA—AB. Ma, presa MN = MK, GN sarà uguale a KF, e GK—KF è quanto GK—GN, cioè NK; adunque sarà CA + AB : CA—AB :: GF : NK, o pure :: GM : MK. Quindi, siccome preso OM per raggio, le MG, MK rappresentano le tan-

* 74. genti degli angoli MOG, MOK*, cioè $\frac{B+C}{2}$, e $\frac{B-C}{2}$; perciò si avrà

$$CA + AB : CA - AB :: \text{tang.}\frac{B+C}{2} : \text{tang.}\frac{B-C}{2}$$

Cioè la somma de' lati è alla loro differenza ec. C. B. D.

ALITER

80. S' indichino con α e β gli angoli B, C del triangolo ACB: si rileverà facilmente dal n°. 75, che debba stare sen. α + sen. β : sen. α — sen. β :: CA + AB : CA — AB. Ma sen. α + sen. β : sen. α — sen. β

* 64. 2. XI. :: tang. $\frac{\alpha+\beta}{2}$: tang. $\frac{\alpha-\beta}{2}$ * Adunque starà pure

$$CA+AB : CA—AB :: \text{tang.}\frac{\alpha+\beta}{2} : \text{tang.}\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\text{cioè} :: \text{tang.}\frac{B+C}{2} : \text{tang.}\frac{B-C}{2}$$

CAP. II.

APPLICAZIONE DE' PRINCIPJ STABILITI NEL PRECEDENTE CAPITOLO ALL'EFFETTIVA RISOLUZIONE DE' TRIANGOLI.

81. In ogni triangolo, dati due angoli è anche dato il terzo, ch'è il supplemento a due retti della somma de' due dati; e perciò nel triangolo rettangolo, s'è dato uno degli angoli acuti, sarà dato anche l'altro. Di più in questo triangolo, se sono dati due lati, si conoscerà il terzo per mezzo del Lemma premesso alla Prop. 4. Lib. I, e senza operazioni trigonometriche.

PROPOSIZIONE VII.

TEOREMA.

82. *In un triangolo rettangolo, dato uno de' lati, ed un' altra delle sue parti ad arbitrio; determinare le rimanenti parti*

CASO. I.

Sieno dati i cateti AC, CB. Per determinare l'angolo in B, si faccia fig. 10.

AC : CB :: R : tang. A * * 74.

Si renderà nota per tal modo la tangente dell'angolo A; e quindi un tal angolo si rileverà dalle Tavole.

Caso II.

Che se diasi il cateto AC: e l'ipotenusa AB. Si troverà l'angolo in B facendo

* 72. AB : AC :: R : sen. B *

donde si farà anche noto quello in A: e si sarebbe trovato direttamente questo, per mezzo della seguente analogia

* 72. AB : AC :: R : cos. A *

Caso III.

E dandosi il cateto AC, ed uno degli angoli acuti A, e perciò anche l'altro. B. Per determinare l'altro cateto BC, bisognerà fare

* 74. R : tang. A :: AC : CB *

* 73. o pure sen. B : sen. A :: AC : CB *

* 75. Ma la prima analogia è da preferirsi alla seconda; poichè il primo termine R di quella è il raggio.

E volendo l'ipotenusa AB, converrebbe fare

* 74. R : seg. A :: AC : AB *

* 72. o pure sen. B : R :: AC : AB *

Caso IV.

Finalmente dandosi l'ipotenusa AB, ed uno degli angoli B alla base, e quindi l'altro A: se si voglia un cateto come AC, si dovrà fare

* 72. R : sen. B :: AB : AC *

E poichè non resta a fare altra combinazione nelle parti del proposto triangolo, oltre le finora indicate; perciò si sarà risoluto il presente Problema. C. B. F.

PROPOSIZIONE VIII.

PROBLEMA.

83. *In un triangolo obbliquangolo, date tre delle sue parti, sempre compreso uno de' lati; determinare le rimanenti parti.*

CASO I.

Sieno dati in primo luogo gli angoli in A, B, e quindi l'altro in C, ed il lato AB; e si cerchino gli altri due lati BC, AC. Si faccia fig. 11.

sen.C : sen.A :: BA : BC *
sen.C : sen.B :: BA : AC * * 73

si avranno per tal modo i lati BC, AC.

CASO II.

Che se diansi i lati AB, AC e l'angolo C opposto ad uno di essi lati AB; si troverà l'angolo in B opposto all'altro lato AC facendo

AB : AC :: sen.C : sen.B * * 72.

Quindi sen.B si farà noto; e dalle tavole si rileverà l'angolo B, per conseguenza quello in A, e finalmente il terzo lato BC*. * cas. 1.

Che se co' dati stessi di poc' anzi si volesse ottenere direttamente il terzo lato BC: dal vertice A dell'angolo opposto ad un tal lato, si abbassi sopra di esso la perpendicolare AD, sarà $DC = AC \cos.C$, $DA = AC \operatorname{sen.}C$; quindi $BD = \sqrt{(AB^2 - AC^2 \operatorname{sen.}^2C)}$ e perciò $BC = AC \cos.C \pm \sqrt{(AB^2 - AC^2 \operatorname{sen.}^2C)}$, ove il segno — del radicale, com'è facile ad avvertirsi col-

la semplice ispezione della figura, ha luogo quando l'angolo B è ottuso. Bisogna anche notare che se fosse ottuso l'angolo dato in C, allora il suo coseno sarebbe negativo.

L'espressione di BC che si è ottenuta non può calcolarsi per logaritmi, a meno di una riduzione nella quale vi entra a parte un nuovo angolo; ond'è che nessun vantaggio si ha dall'aver ottenuto nel caso proposto il lato BC indipendentemente dall'aver prima determinato l'angolo B, e quindi quello in A; che perciò bisognerà condursi piuttosto in questo modo, come da dotti Trigonometri è stato avvertito.

Scolio.

È però da notarsi per questo secondo Caso, che se mai l'angolo dato è opposto al lato maggiore, allora l'angolo opposto all'altro lato dato dovrà essere necessariamente acuto; poichè dev'essere minore del dato, e quindi acuto, quando anche quello sia ottuso; mentre un triangolo non può avere due angoli ottusi, o uno ottuso, e l'altro retto. Che se poi l'angolo dato è opposto al lato minore, com'è nella fig. 12, in cui l'angolo dato C sta opposto al lato BA
fig. 12. minore di AC; allora la specie dell'angolo opposto al lato AC sarà *dubbia*, cioè potrà esso essere acuto, o ottuso. In fatti descrivendosi col centro A intervallo il lato minore AB il cerchio BEF; questo dovrà segare il lato BC in *b*, e congiunta la A*b* avrà gli stessi dati sì il triangolo ABC, che l'altro A*b*C; per conseguenza si sarà in dubbio se risolvasi l'uno, o l'altro, a meno che le circostanze della quistione non tolgano l'incertezza.

Ed è anche chiaro, che per sapere il valore di

BC bisogna che sia nota la specie dell' angolo opposto al maggiore de' lati dati, altrimenti la BC resterà dubbia.

Caso III.

E se sien dati i due lati BA, AC, e l'angolo in A da essi compreso: si troverà ciascuno degli angoli alla base facendo fig. 25.

$$AC + AB : AC - AB :: \text{tang.} \frac{B+C}{2} : \text{tang.} \frac{B-C}{2} \quad * 79.$$

Si avrà in tal modo la tangente dell' angolo, ch' è semidifferenza degli angoli B, C, e quindi un tal angolo si farà noto dalle tavole: e se esso si aggiunga alla metà dalle somma degli angoli B, C, si avrà l'angolo maggiore B, se se ne tolga, si avrà il minore C.

Ed è facile a rilevarsi dall' analogia sopra recata, che quando non occorre di determinare, che solamente gli altri due angoli del triangolo, i lati intorno al dato angolo non è necessario che sian dati di grandezza, ma basta che lo sieno di sola ragione.

Conosciuti gli angoli in B, C, il lato BC adjacente ad essi si determinerà pel Cas. 1.

Scolio.

Talvolta i lati AB, AC non sono dati in numeri naturali, ma bensì per mezzo de' logaritmi di essi, come avviene, per esempio, allorchè ne' calcoli di Astronomia si rilevano le distanze de' pianeti dal sole nelle tavole astronomiche costruite a quest' uso. In tal caso per evitare di determinarsi in numeri na-

turali i suddetti lati, prima di procedere alla risoluzione del triangolo, il che risulterebbe di grande impaccio, si potrà usare il seguente ripiego.

fig. 16. Si supponga la CA, ch'è il maggiore de' due lati, posta ad angolo retto colla BA, cioè come la cA, congiungasi la Bc, starà

* 74. BA : Ac, o AC :: R : tang. cBA *

e si avrà così l'angolo cBA, il quale sarà maggiore di 45°. Si dinoti un tal angolo per α. E poichè

* 80. tang. $(\alpha - 45°) = \frac{\text{tang. } \alpha - \text{tang. } 45°}{1 + \text{tang. } \alpha \times \text{tang. } 45°}$ *, si avrà, sostituendo per tang. α l'espressione $\frac{AC}{AB}$ *, ed 1 per tang. 45°,

tang. $(\alpha - 45°) = \frac{AC - AB}{AC + AB}$, e quindi AC + AB : AC — AB :: R : tang. (α — 45°). Che perciò sostituendo alla prima di queste ragioni l'uguale

* 79. tang. $\frac{1}{2}$ (B+C), o cot. $\frac{1}{2}$ A : tang. $\frac{1}{2}$ (B—C)* sarà

R : tang. (α—45°) :: cot. $\frac{1}{2}$ A : tang. $\frac{1}{2}$ (B—C)

Caso. IV.

fig. 14. Finalmente se sieno dati i tre lati BC, CA, AB e si cerchino gli angoli.

L'angolo A si otterrà facilissimamente, per mezzo di una delle due formole esibite nel num.° 78. Ed un altro de' suoi angoli si potrà ottenere o nel modo poc'anzi detto, o come nel Cas. 1. E da questi due angoli resterà poi determinato il terzo.

SCOLIO.

84. Nelle ricerche che si fanno per la risoluzione de' triangoli, bisogna, quanto più si può, aver l'avvertenza di dedurre ciascuna parte che si cerca direttamente dalle parti date, evitando d' implicare nella determinazione di esse qualche altra parte incognita del triangolo, che siasi precedentemente determinata.

Imperocchè non essendo che approssimanti per loro natura i quarti proporzionali che derivansi da analogie ove sienvi quantità trigonometriche; e 'l più delle volte divenendolo anche tanto meno, per le operazioni aritmetiche che conviene fare per rinvenirli; sempre chè si farà uso di essi per termine di un' altra analogia, il quarto termine di questa alle due precedenti imperfezioni che lo fanno deviare dall' esattezza unirà anche l' altra del non esatto valore del termine impiegato.

CAP. III.

DELLA MANIERA DI DETERMINARE I SEGMENTI DELLA BASE E LA PERPENDICOLARE, NE' DIVERSI CASI DI RISOLVIMENTO PROPOSTI NEL PRECEDENTE CAPITOLO PE' TRIANGOLI OBBLIQUANGOLI; E DI ALCUNE ALTRE RICERCHE ANALOGHE.

85. Le considerazioni esposte nello Scolio in fine del precedente Capitolo ci hanno determinato all'oggetto quassù proposto pel presente, a fin di mostrare in qual modo la perpendicolare ed i segmenti della base in un triangolo obbliquangolo possansi ottenere direttamente dalle tre parti date di esso, senza frammezzarvi altre di quelle che v' erano incognite.

PROPOSIZIONE IX.

PROBLEMA.

fig. 14. 86. *Nel triangolo ABC dati gli angoli in A, C, e 'l lato adjacente CA: ritrovare i segmenti AD, DC di questo lato, e la perpendicolare BD che cade sopra di esso dall' angolo opposto.*

Nel triangolo BDC sta DC: DB :: cot. C: R, e nell' altro triangolo BDA si ha parimente DB: DA :: R: tang. DBA, o cot. BAD, che dinoterò per cot. A; quindi si avrà per equalità DC: DA :: cot. C: cot. A, o :: tang. A : tang. C. Or da quest' ultima analogia si rileva facilmente che stia

$DC+DA : DC-DA :: \text{tang.}A+\text{tang.}C : \text{tang.}A-\text{tang.}C$

$$:: \frac{\text{sen.}A}{\cos.A}+\frac{\text{sen.}C}{\cos.C} : \frac{\text{sen.}A}{\cos.A}-\frac{\text{sen.}C}{\cos.C} \quad * 19.$$

$$:: \frac{\text{sen.}A\cos.C+\text{sen.}C\cos.A}{\cos.A\cos.C} : \frac{\text{sen.}A\cos.C-\text{sen.}C\cos.A}{\cos.A\cos.C}$$

o sia: $\text{sen.}(A+C)$, cioè $\text{sen.}B : \text{sen.}(A-C)$* * 45.

Che perciò essendo dato quest' ultimo rapporto, ed un de' termini del primo, secondo che la perpendicolare BD cade dentro o fuori del triangolo; sarà anche dato l' altro termine di esso; e quindi si avranno i segmenti AD, DC della base.

Per aver poi la perpendicolare BD si osservi che $DA = DB\,\text{cot.}A$, e $DC = DB\,\text{cot.}C$; che perciò $AC = DB\,(\text{cot.}C + \text{cot.}A)$* * 22.

$$= DB\left(\frac{\cos.C}{\text{sen.}C}+\frac{\cos.A}{\text{sen.}A}\right)$$

$$= DB\left(\frac{\text{sen.}A\cos.C+\text{sen.}C\cos.A}{\text{sen.}C\,\text{sen.}A}\right)$$

$$= DB\,\frac{\text{sen.}(C+A)}{\text{sen.}C\,\text{sen.}A}$$

E quindi $DB = \frac{AC\,\text{sen.}C\,\text{sen.}A}{\text{sen.}(A+C)} = \frac{AC\,\text{sen.}C\,\text{sen.}A}{\text{sen.}B}$ * 21.

Ed è mediante questa formola che resta risoluto trigonometricamente il Probl. I. della Sezione IV. Cap. II. dell' Aritmetica Universale del Newton.

87. *Scol.* Dalla prima parte della soluzione del presente Problema si rileva che: *I segmenti di un lato di un triangolo, prodotti in esso dalla perpendicolare che gli si abbassa dal vertice dell'angolo opposto, sono come le tangenti degli angoli che gli corrispondono alternamente.*

PROPOSIZIONE X.

PROBLEMA.

fig. 14. 88. *Dati i tre lati del triangolo ABC, esibire i segmenti AD, DC di un di questi prodotti, dalla perpendicolare abbassata ad esso dall' angolo opposto: e di più una tal perpendicolare.*

I segmenti AD, DC dalla base si avranno facen-
* 76. do AC : BC + BA :: BC — BA : DC ∓ DA*; ed ottenutosi questo quarto termine sarà facile a rilevarne i segmenti DC, DA, venendo sempre ad esser data la somma e la differenza di essi.

Per ottener poi la perpendicolare BD indipendentemente da' segmenti AD, DC si procederà nel seguente modo

Nel n.° 78 si è ottenuto

$$\text{sen. } \tfrac{1}{2} A = \tfrac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{(a+b-c)\,(a+c-b)}{bc} \right)}$$

$$\text{cos. } \tfrac{1}{2} A = \tfrac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{(b+c+a)\,(b+c-a)}{bc} \right)}$$

* 46. Adunque sarà sen. $\frac{1}{2}$ A cos. $\frac{1}{2}$ A, cioè $\frac{1}{2}$ sen. A*, o sia $\frac{BD}{2AB}$, cioè $\frac{BD}{2c} =$ . . . . . .

$$\tfrac{1}{2} \sqrt{\frac{(b+c+a)\,(b+c-a)}{bc}} \times \tfrac{1}{2} \sqrt{\frac{(a+b-c)\,(a+c-b)}{bc}}$$

e quindi

$$BD = \frac{1}{2b} \sqrt{\left((b+c+a)(b+c-a)(a+b-c)(a+c-b) \right)}$$

nella quale espressione, come si vede, basta sostituire i valori de' lati di un triangolo per aver la perpendico-

lare che, pel presente caso, cade sul lato b, cioè AC, dal vertice dell' angolo B che gli è opposto. Ed una tal formola potrà agevolmente modificarsi per gli altri casi.

SCOLIO.

89. Facendo $a+b+c=2p$, sarà $a+b-c=2p-2c$, $a+c-b=2p-2b$, $b+c-a=2p-2a$; e quindi la perpendicolare BD si potrà esprimere, per mezzo di una semplicissima ed ovvia riduzione, nella seguente altra maniera più elegante, cioè

$$\frac{2}{b}\sqrt{\left(p\,(p-a)\,(p-c)\,(p-b)\right)}$$

E da essa si rileva facilmente, che l' espressione dell' aja di un triangolo ne' suoi lati sia la seguente

$$\sqrt{\left(p\,(p-a)\,(p-c)\,(p-b)\right)}$$

cioè, *la radice quadrata del prodotto che ha per fattori la semisomma de' lati, e le tre differenze di ciascun lato da questa.*

PROPOSIZIONE XI.

PROBLEMA.

90. *Dati nel triangolo ABC i lati AB, BC, e l' angolo ABC da essi compreso: determinare i segmenti ABD, DBC di questo angolo, prodotti dalla perpendicolare che cade sul lato ad esso opposto.* fig. 14.

Essendo BD = CB cos. CBD = AB cos. ABD, sarà CB cos. CBD = AB cos. ABD; e perciò CB : AB ::

cos ABD : cos. CBD ; dalla qual proporzione è facile il rivelarne l'altra CB+AB : CB—AB :: cos.ABD+cos.CBD : cos. ABD — cos. CBD ; cioè (*n.°* VII. e VIII. §. 62.) ::

$$\cos.\frac{ABD+CBD}{2}\cos.\frac{CBD-ABD}{2} : \text{sen.}\frac{ABD+CBD}{2}\text{sen.}\frac{CBD-ABD}{2}$$

e chiamando β l'angolo ABD ed α l'altro CBD , sarà

$$AC+CB:AC-CB :: \cos.\frac{\alpha+\beta}{2}\cos.\frac{\alpha-\beta}{2} : \text{sen.}\frac{\alpha+\beta}{2}\text{sen.}\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\text{cioè} :: \frac{\cos.\frac{\alpha+\beta}{2}\ \text{sen.}\frac{\alpha-\beta}{2}}{\text{sen.}\frac{\alpha+\beta}{2}\ \cos.\frac{\alpha-\beta}{2}}$$

o : : tang. ½ (CBD—ABD) : tang. ½ (CBD+ABD). E dall' esser noto un de' termini della seconda ragione di quest' ultima analogia , quello cioè che esprime l'angolo dato ABC , si farà anche noto l'altro termine, ottenuto il quale resteranno determinati gli angoli cercati CBD , ABD.

91. *Scol.* Quest' ultimo risultamento che offre la soluzione del presente problema dà un' altra maniera onde risolvere il triangolo ABC , dato l'angolo ABC , ed i lati che lo comprendono , diversa da quella che n' è stata esibita nel Caso III. della Prop. VIII. del presente Libro.

PROPOSIZIONE XII.

PROBLEMA.

92. *Nel triangolo ACB in cui si divida per metà un angolo di esso ACB per mezzo della CD; si vuol determinare i segmenti che tal linea CD produce nel lato ad esso opposto; dati che sieno o un tal lato e gli angoli adjacenti A, B, o pure i tre lati del triangolo.* fig. 17.

PARTE I. Sieno dati gli angoli in A, B e 'l lato AB. E poichè $CD = \frac{BD\,sen.B}{sen.\,BCD} = \frac{AD\,sen.A}{sen.\,BCD}$, saranno queste due quantità ultime tra loro uguali, e quindi

$$BD : AD :: sen.\,A : sen.\,B.$$

e $BD + AD : BD - AD :: sen.A + sen.B : sen.A - sen.B$ cioè

$$:: tang.\,{}^1/_2\,(A+B) : tang.\,{}^1/_2\,(A-B)\,^*.$$ * XI.61.

Laonde sarà

$$BD - AD = \frac{AB \times tang.{}^1/_2\,(A-B)}{tang.\,{}^1/_2\,(A+B)}$$

Quindi avendosi la differenza de' segmenti BD, DA, e la loro somma AB, si farà noto ciascun di questi.

PARTE II. Che se sieno dati i tre lati del triangolo; la differenza de' segmenti del lato AB si otterrà geometricamente per mezzo della 3. del Lib. VI. di Euclide, e senza far uso della Trigonometria.

PROPOSIZIONE XIII.

PROBLEMA.

fig. 18. 93. *Trovare i valori de' segmenti ACD, DCB dell' angolo ACB, prodotti da una linea CD che divide per metà il lato opposto AB; nel caso che sia dato l' angolo diviso, ed i lati AC, CB, che lo comprendono.*

$$\text{Essendo } CD = \frac{BD \text{ sen.B}}{\text{sen. BCD}} = \frac{AD \text{ sen.A}}{\text{sen. ACD}}$$

saranno uguali queste due espressioni diverse della CD; e perciò essendo BD = AD starà

sen.BCD : sen.ACD :: sen.B : sen.A :: AC : BC

e quindi

AC+BC: AC—BC:: se.BCD+se.ACD: se.BCD—se.ACD :: tang.$^1/_2$(BCD+ACD): tang.$^1/_2$(BCD—ACD); che perciò si farà nota tang. $^1/_2$ (BCD—ACD)*; e per mezzo di essa sarà poi facile il rilevare i valori degli angoli ACD, BCD.

* XI.64.

CAP. IV.

DI ALCUNI ALTRI CASI IN CUI LE TRE PARTI DATE PER LA RISOLUZIONE DI UN TRIANGOLO SONO DIVERSAMENTE COMBINATE.

94. Oltre le principali combinazioni di tre parti di un triangolo necessarie per la determinazione delle rimanenti, del quale oggetto si è trattato nel Cap. II. del pesente Libro, possono anche aver luogo per la risoluzione del triangolo diverse altre combinazioni di dati, delle quali passeremo ad esporne alcune ne' seguenti Problemi. Queste tali combinazioni debbono però esser sempre tali, che implicitamente contengano tre parti date del triangolo, ciascuna indipendentemente dalle altre due.

PROPOSIZIONE XIV.

PROBLEMA.

95. *Nel triangolo BAC sieno dati i lati AB, AC, fig. 19. e la somma, o la differenza degli angoli B e C alla base; si vuol risolvere il triangolo.*

Poiché $BA+AC : AC-AB :: \text{tang.} \frac{B+C}{2} : \text{tang.} \frac{B-C}{2}$;

perciò se è nota $\frac{B+C}{2}$ si otterrà $\frac{B-C}{2}$; ed al contrario.

PROPOSIZIONE XV.

PROBLEMA.

fig. 19. 96. *Risolvere il triangolo BAC in cui sieno noti gli angoli, ed AB + AC, o AC — AB.*

Si otterrà la differenza de' lati AC, AB se era data la somma di essi, o al contrario la somma se n' era data la differenza, per mezzo della seguente analogia

$$\text{tang.}\frac{B+C}{2} : \text{tang.}\frac{B-C}{2} :: AB+AC : AC-AB$$

PROPOSIZIONE XVI.

PROBLEMA.

fig. 19. 97. *Le cose date per risolvere il triangolo BAC sieno l' angolo A il lato BC che lo sottende, ed AB + AC, o AC — AB.*

Parte I. Sia nota AC — AB. E poiche sen. A, sen. B, e sen. B — sen. C sono in ordinata ragione con BC, AC ed AC — AB, sarà

$$\text{sen.A} : \text{sen.B} - \text{sen.C} :: BC : AC - AB$$

e perciò
$$BC = \frac{\text{sen. A } (AC - AB)}{\text{sen. B} - \text{sen. C}}$$
$$= \frac{\text{sen. } (B+C)\ (AC - AB)}{\text{sen. B} - \text{sen. C}}$$
$$= \frac{2.\text{sen.}\tfrac{1}{2}(B+C)\cos.\tfrac{1}{2}(B+C)\ (AC-AB)}{2.\text{sen.}\tfrac{1}{2}(B-C)\cos.\tfrac{1}{2}(B+C)}$$

$$= \frac{\text{sen. } \frac{1}{2}(B+C)\ (AC-AB)}{\text{sen. } \frac{1}{2}(B-C)}$$

Or sen. $\frac{1}{2}(B+C) = \text{cos. } \frac{1}{2} A$

Adunque sarà

$$\text{sen. } \frac{1}{2}(B-C) = \frac{(AC-AB)\ \text{cos.} \frac{1}{2} A.}{BC}$$

PARTE II. Sia or data AC+AB. Ed essendo come poc'anzi

sen. A : sen. B + sen. C :: BC : AC + AB

sarà facile per mezzo degli stessi passaggi di poc'anzi di ottenere la seguente formola

$$\text{cos. } \frac{1}{2}(B-C) = \frac{(AB+AC)\ \text{sen.} \frac{1}{2} A.}{BC}$$

98. *Scol.* 1. Ottenutosi l'angolo ch'è semidifferenza di quelli alla base del triangolo proposto, cioè $\frac{1}{2}(B-C)$, la determinazione de' lati AC, AB ne segue immediatamente; poichè nel caso della Parte I. del Prob., ove supponesi nota la AC—AB, la formola della Parte II. darà il valore di AC+AB: ed al contrario supponendo nota la AB+AC, come nella Parte II., la formola della Parte I. darà il valore di AC—AB.

99. *Scol.* 2. Il triangolo proposto si sarebbe potuto risolvere prendendo sul lato CA la CE = CA + AB, o a CA — AB; e poi risolvendo il triangolo BEC in cui verrebbe ad esser dato l'angolo in E, ed i due lati BE, BC; ma la prima soluzione è preferibile. *fig.* 20.

PROPOSIZIONE XVII.

PROBLEMA.

fig. 10. 100. *Sieno dati nel triangolo BAC l'angolo in C, il lato adjacente CB, e la somma o la differenza degli altri due lati, risolverlo.*

Si prenda nell'altro lato CA dell'angolo dato C la $CE = CA + AB$ o a $CA - AB$, e si congiunga la BE, si faranno noti nel triangolo EBC due lati e l'angolo compreso; che perciò esso potrà risolversi: ed è pur facile il ravvisare come da tal risoluzione si possa passare a quella del triangolo proposto ABC.

PROPOSIZIONE XVIII.

PROBLEMA.

fig. 11. 101. *Risolvere il triangolo BAC in cui sieno dati il lato BA, l'angolo C ad esso opposto, ed il rettangolo de' lati BC, CA che lo comprendono.*

Essendo $BC^2 + CA^2 = AB^2 + 2BC \times CA \cos. C$,

sarà $(BC + CA)^2 = AB^2 + 2BC \times CA\,(\cos.C + 1)$

e $(BC - CA)^2 = AB^2 + 2BC \times CA\,(\cos.C - 1)$

donde si ricaverà

$$BC + CA = \sqrt{\left(AB^2 + 2BC \times CA\,(\cos.C + 1)\right)}$$

$$BC - CA = \sqrt{\left(AB^2 + 2BC \times CA\,(\cos.C - 1)\right)}$$

dalle quali due ultime equazioni è facile il rilevarne i valori di BC, CA.

Volendo poi il valore degli angoli in B, A indipendentemente da quello de' lati BC, CA, si procederà nel seguente modo

BA : sen. C :: AC : sen. B :: BC : sen. A*. Laonde sarà BA² : sen.² C :: AC×BC : sen.A sen.B. * 75.

Or sen.B = ½cos. (A—B) — ½cos. (A+B)* = . . ½ cos. (A—B) + ½ cos. C : che perciò se questo valore s' introduca nell' analogia di sopra, si avrà da essa * 61.IV.

$$\cos.(A-B) = \frac{2AC \times BC \text{ sen.}^2C}{BA^2} - \cos. C$$

Laonde avendo il valore di cos.(A—B), ed essendo pur noto l' altro di cos. (A+B), si potrà agevolmente ottenere gli angoli A, B.

PROPOSIZIONE XIX.

PROBLEMA.

102. *Conoscendo i tre angoli di un triangolo, e la somma de' tre lati, risolverlo.*

Essendo BC, CA, AB proporzionali con sen.A, sen.B, sen.C; si avrà, per la 12. del Lib. V. di Euclide,

sen.A+sen.B+sen.C : sen.A :: BC+CA+AB : BC

e quindi . . . $BC = \frac{\text{sen.A } (BC+CA+AB)}{\text{sen.A}+\text{sen.B}+\text{sen.C}}$

E similmente si determineranno gli altri due lati.

PROPOSIZIONE XX.

PROBLEMA.

fig. 11. 103. *Risolvere il triangolo BAC, in cui sia data l'aja, l'angolo in B, ed il lato BC.*

S'indichi l'aja per M^2, sarà $AD = \frac{2M^2}{BC}$; e perciò $BA = \frac{AD}{\text{sen.}B} = \frac{2M^2}{BC\ \text{sen.}B}$: ed il rimanente lato AC, e gli altri angoli in A, C del triangolo proposto si potranno facilmente determinare.

PROPOSIZIONE XXI.

PROBLEMA.

fig. 11. 104. *Risolvere il triangolo BAC, in cui sieno dati l'angolo BAC, il lato opposto BC, e la perpendicolare AD su di questo.*

S'indichi per A l'intero angolo BAC. E poichè $\text{sen.}C = \frac{AB\ \text{sen.}A}{BC}$, e $\frac{AD}{\text{sen.}B} = \frac{AD}{\text{sen.}(A+C)}$, sarà perciò $\text{sen.}C = \frac{AD\ \text{sen.}A}{BC\ \text{sen.}(A+C)}$; e quindi $\frac{AD\ \text{sen.}A}{BC} = \text{sen.}(A+C)\ \text{sen.}C = \frac{1}{2}\text{cos.}A - \frac{1}{2}\text{cos.}(2C+A)$, il quale pareggiamento si ottiene per mezzo dell'equazione IV. del n.° 61., col porre in questa $\varphi = A+C$, e $\theta = C$ Laonde sarà $\text{cos.}(2C+A) = \text{cos.}A - \frac{2AD\ \text{sen.}A}{CB}$.

Dalla quale equazione si ha l'angolo $2C+A$, e quindi il solo angolo C; e finalmente l'altro B.

PROPOSIZIONE XXII.

PROBLEMA.

105. *Risolvere il triangolo BAC in cui sia data la base BC, l'altezza AD, e la differenza degli angoli C, B alla base.* fig. 11.

Esprimasi, per facilitazione del calcolo, BC per $2a$, AD per b, BD — DC per $2x$, che perciò sarà BD $= a+x$, CD $= a-x$, e la tangente nota di C—B sia dinotata da p

E poichè tang. $C = \frac{DA}{CD} = \frac{b}{a-x}$ *, e similmente . . . . . tang. $B = \frac{DA}{DB} = \frac{b}{a+x}$, sarà. . . . * 19.

tang. $(C-B) = p = \frac{\frac{b}{a-x} - \frac{b}{a+x}}{1+\frac{b^2}{a^2-x^2}} = \frac{2bx}{a^2+b^2-x^2}$ * * 50.

dalla qual' equazione sarà agevol cosa il rilevare il valore di x, e quindi quelli di BD, DC, per mezzo de' quali potrà poi completamente risolversi il proposto triangolo.

106. *Scol.* Il procedimento per la soluzione sarebbe lo stesso, se, invece della differenza, fosse data la somma degli angoli C, B alla base.

PROPOSIZIONE XXIII.

PROBLEMA.

fig. 11. 107. *Risolvere il triangolo BAC, dato l'angolo BAC, la somma BA+AC de'lati che lo comprendono, e la perpendicolare AD, che dal vertice di quell'angolo cade sul lato opposto AC.*

Pongasi BA+AC=2*a*, BA—AC=2*x*, che perciò sarà espresso il lato AB da $a+x$, e l'altro AC da $a-x$: sia poi la AD espresso da *b*, e 'l coseno dell'angolo dato BAC da *p*; sarà . . . . . ,

$\cos.BAD = \frac{AD}{BA} = \frac{b}{a+x}$, e $\cos.CAD = \frac{AD}{AC} = \frac{b}{a-x}$;

ond'è che sarà poi $\text{sen.}BAD = \frac{1}{a+x}\sqrt{\left((a+x)^2-b^2\right)}$

e $\text{sen.}CAD = \frac{1}{a-x}\sqrt{\left((a-x)^2-b^2\right)}$; che perciò essendo cos. BAC = *p*, sarà . . . . . .

$p = \frac{b2}{a^2-x^2} - \frac{1}{a^2-x^2}\sqrt{\left((a^2-x^2)^2-2b^2(a^2+x^2)+b^4\right)}$

cioè $p\,(a^2-x^2) = \sqrt{\left((a^2-x^2)^2-2b^2(a^2+x^2)+b^4\right)}$

Dalla qual' equazione ottenutosi il valore di *x*, si verrà ad aver quelli de' lati BA, AC; ed il proposto triangolo resterà risoluto.

108. *Scol.* Nel modo stesso si sarebbe risoluto il Problema, se invece di BA + AC fosse stata data BA — AC.

SCOLIO GENERALE.

109. Ne' problemi precedenti tutte le volte che co' dati proposti non si trova determinata qualcheduna delle parti del triangolo, bisogna, che questa si cerchi cogli ovvj principj esposti nel Cap. II. del presente Libro, dopo di aver esibite quelle, che nel problema si trovano determinate; essendo questo per que' casi, il mezzo più conveniente per rinvenirle.

ELEMENTI

DI

TRIGONOMETRIA.

LIBRO III.

DE' TRIANGOLI SFERICI.

CAP. I.

DEFINIZIONI, E NOZIONI PRELIMINARI.

PROPOSIZIONE I.

TEOREMA.

110. *La comune sezione di un piano e di una sfera, è un cerchio.*

La sfera BFAE sia segata dal piano ABC, sul quale dal centro O della sfera si abbassi la perpendicolare OD; e presi ovunque nel perimetro della sezione ABC i punti B, C, si uniscano le OB, OC, DB, DC. E poichè la OD è perpendicolare al piano ABC, gli angoli in D saranno retti *; e perciò i due *fig.* 21. *d.3.XI.

triangoli rettangoli ODB, ODC, avendo uguali le loro ipotenuse OC, OB, ed il cateto OD comune, dovranno avere anche uguali gli altri cateti DB, DC. Laonde tutti i punti del perimetro della sezione ABC sono equidistanti dal punto D, ch'è dentro di tal sezione; quindi essa sarà un cerchio, ed il punto D ne sarà il centro C.B.D.

111. *Cor.* 1. Il centro di ogni cerchio, che rappresenta la sezione fatta in una sfera da un piano, è dunque quel punto dove questo piano è incontrato dalla perpendicolare abbassatali dal centro della sfera; e di più il quadrato del raggio di questo cerchio è quanto la differenza de' quadrati del raggio della sfera, e della distanza del centro di essa da quello della sfera.

112. *Cor.* 2. Ciò posto è manifesto, che a misura che si minorerà la distanza del centro di un di que' cerchi da quello della sfera, maggiore si farà il cerchio; e che questo diverrà il massimo, allorchè il piano che sega la sfera passa per lo centro di questa: che perciò

113. *Def.* 1. Tutti que' cerchi che hanno per centro quello della sfera si dicono *massimi*, e si chiamano poi cerchi *minori* tutti gli altri.

114. *Cor.* 1. Per due punti della superficie di una sfera, che non sieno diametralmente opposti, non vi passa che un solo cerchio massimo; poichè il piano di questo dovendo passare anche per lo centro della sfera, viene a passare per tre punti, non posti in linea retta, e perciò è determinato *. * 2. XI.

115. *Cor.* 2. Di più due cerchi massimi intersegandosi in una retta, che passa per lo centro comune di essi, e perciò è un diametro, debbono dividersi scambievolmente per metà; e le loro cir-

conferenze si verranno ad intersegare alla distanza di 180°.

116. *Def.* 11. Quel diametro della sfera, ch' è perpendicolare al piano di un circolo massimo, si dice suo *asse*: e gli estremi di un tal diametro ne sono i *poli.*

Questi punti si dicono anche poli di tutti gli altri cerchi paralleli a quel circolo massimo.

117. *Cor.* É chiaro dall' addotta definizione, che due cerchi massimi non possono avere un medesimo polo: poichè altrimenti la congiungente un tal polo col loro centro comune, sarebbe perpendicolare a due piani diversi. Di più, che se per gli poli di un circolo massimo ne passi un altro; gli archi di questo frapposti tra un de' poli e la circonferenza del primo cerchio sieno di 90°.

PROPOSIZIONE II.

TEOREMA.

118. *Il raggio di una sfera sta a quello di un di lei cerchio minore, come il raggio trigonometrico al seno dell' arco di cerchio massimo, ch'è tra la circonferenza del cerchio minore, ed il polo di esso.*

Sia ABC un cerchio minore, il cui polo sia E; fig. 21.
sarà il suo raggio DB seno dell' arco BE* ; ma nel trian- * 10.
golo rettangolo BDO sta l' ipotenusa OB, cioè il raggio della sfera, al cateto BD, come il raggio trigonometrico al seno dell' angolo BOD *, o dell' arco BE. Dunque ec. C.B.D.

119. *Cor.* Essendo i raggi di due cerchi come le loro circonferenze * e quindi come le 6ome parti di * Sp. 3. Arch.

queste, cioè come i loro gradi; ne segue, che: *il grado di un cerchio massimo sta a quello di un cerchio minore, come il raggio trigonometrico al seno dell'arco di cerchio massimo, ch'è tra il cerchio minore, ed il suo polo.*

120. *Def.* III. L'*angolo sferico* è la scambievole inclinazione di due archi di due cerchi massimi sulla superficie di una sfera.

121. *Def.* IV. *Triangolo sferico* è poi quella porzione di superficie sferica, ch'è terminata da tre archi di tre cerchi massimi.

PROPOSIZIONE III.

TEOREMA.

122. *Se in due cerchi disuguali si adatti una stessa corda; l'arco più piccolo, che questa troncherà dal maggior cerchio, sarà minore dell'arco più piccolo, che la stessa taglierà dal cerchio minore.*

fig. 22. Sieno ABK, ABH i due cerchi, ed AB la loro corda comune; e quindi A, B que' soli punti ne' qua-
* 10. III. li si potranno intersegare le loro circonferenze*. Or per gli loro centri F, G si tiri la retta EeHK, e si uniscano le BH, HA, BK, KA. Inoltre si tiri la AeL, e finalmente giungansi le Be, BL. E poichè gli angoli AeB, AKB fanno due retti, del pari che gli
* 22. III. altri ALB, AHB*; perciò quelli saranno uguali a questi. Ma l'angolo AKB è minore dell'altro angolo
* 21. I. AHB*; adunque l'altro angolo AeB dovrà esser maggiore di ALB; e quindi il punto e dell'arco AeB dovrà cadere al di sotto dell'altro arco AEB, e lo stesso dimostrandosi per ogni altro punto dell'arco

AeB, ne segue perciò, che l'arco AEB dovrà esser maggiore dell'altro AeB. C.B.D.

ALITER

123. I due cerchi proposti AED, *b*Ec si suppon- *fig.* 23.
ga che si tocchino al di dentro in E; si tiri la retta EFG per gli loro centri, e s'intendano nell'uno, e nell'altro cerchio applicate le corde uguali BC, *bc* perpendicolarmente alla retta EFG: è chiaro che se il centro F del cerchio *b*Ec si supponga scorrere sulla retta FE, finchè il punto K passi in H, cioè finchè la *bc* coincida colla BC, ed i punti *b*, *c* cadano sopra gli altri B, C; in tal caso l'arco *b*Ec dovrà necessariamente comprendere l'altro BEC, e quindi esserne maggiore.

124. *Cor.* Adunque: *l'arco di cerchio massimo minore della semicirconferenza, rappresenta la minima distanza, sulla superficie della sfera, tra i due punti pe' quali esso passa.* Perciò l'arco di cerchio massimo è la misura naturale, ed unica, anche perchè costante, di ogni distanza sferica; e quindi adoprausi esclusivamente archi di cerchi massimi per lati de' triangoli sferici.

125. *Scol.* Che l'arco circolare AEB sia maggiore dell'altro AeB, si rileva facilmente dal principio 1.° stabilito ne' Teoremi di Archimede; ed ecco in qual modo.

Si tirino agli archi AEB, AeB le tangenti AY, *fig.* 24.
AX nel punto A dov' essi s' intersegano, e poi si tiri la AZ, che divida comunque l'angolo YAX compreso da quelle tangenti; una tal retta non potrà intersegare, che il solo arco esteriore AEB. Dal che chiaramente risulta, che si possa inscrivere in questo un perimetro, che non abbia di comune coll'arco AeB, che i soli estremi A, B. Ed è facile il vedere,

che si possa anche circonscriver sempre all'arco AeB un'altro perimetro di cui due lati sieno parti delle tangenti tirate per gli punti A, B, e che affatto non interseghi quel primo. Or è chiaro che essendo l'arco AEB maggiore del perimetro in esso inscritto, sia anche maggiore dell'altro perimetro circonscritto all'arco AeB, e quindi di tal arco.

PROPOSIZIONE IV.

TEOREMA.

fig. 24. 126. *Se in una sfera si tirino i tre cerchi massimi ADB, AEB, AFB, i quali abbiano lo stesso diametro AB; gli angoli sferici in A, o in B, che vengono formati dalle circonferenze di questi cerchi, saranno proporzionali agli archi DE, EF dell'altro cerchio massimo, che ha per asse la AB, e che sono posti tra le circonferenze di que' primi cerchi*: cioè, *sarà l'angolo DAE all'altro EAF, come l'arco DE all'arco EF.*

Imperocchè si prenda l'arco DC=DE, e l'altro FG=EF, e s'intendano descritti, per gli punti C, G gli altri cerchi massimi ACB, AGB: è chiaro, che se il punto C passi in D, il punto D passerà in E, e l'angolo sferico CAD combacerà coll'altro DAE; che perciò essi saranno uguali. E similmente l'angolo GAF sarà uguale all'altro FAE. Laonde l'angolo CAE, e l'arco CE saranno ugualmente multiplici dell'angolo DAE, e dell'arco DE; come pure l'angolo EAG, e l'arco EG, saranno ugualmente multiplici dell'angolo EAF, e dell'arco EF. Ma è poi vero che l'angolo CAE uguaglierà, sarà maggiore, o pur

minore dell' angolo EAG, secondo che l' arco CE sarà uguale, maggiore, o minore dell' arco EG. Adunque dovrà stare l' angolo DAE all' angolo EAF, come l' arco DE all' arco EF*. C.B.D. *d.5.V.

127. *Cor.* Gli archi DE, EF essendo proporzionali agli angoli sferici DAE, EAF, potranno prendersi per loro misura: che perciò l'angolo sferico DAE sarà di tanti gradi e minuti, quanti ne contiene l'arco DE. Ma dello stesso numero di gradi e minuti è pure l'angolo DOE al centro del cerchio HEK, il qual angolo misura l' inclinazione del circolo BEA al circolo BDA; quindi: *ogni angolo sferico è dello stesso numero di gradi e minuti dell' angolo d' inclinazione de' piani de' cerchi, le circonferenze de' quali comprendono l' angolo sferico.* Che perciò potrà sempre prendersi questo invece di quello. E siccome se tirinsi a' cerchi ADB, AEB le tangenti AL, AM nel punto A, l' angolo LAM è quanto l' angolo DOE; perciò anche *l' angolo LAM compreso dalle tangenti i lati di un angolo sferico DAE nel vertice di esso, si può prendere per equivalente dell' angolo sferico.*

128. *Scol.* Essendo di 360° l' intera circonferenza HEK; anche di 360° dovranno essere tutti gli angoli sferici, che si verranno a formare in A da quanti cerchi massimi si vogliono. E così si potrà dimostrare, che: *gli angoli sferici verticali sono uguali*; che: *gli angoli sferici conseguenti sono uguali a due retti*; ed altre cose, che per brevità si tralasciano di quì rapportare.

CAP. II.

DELLA NATURA, E DELLE PROPRIETA' DE' TRIANGOLI SFERICI.

PROPOSIZIONE V.

TEOREMA.

129. *Ogni lato di un triangolo sferico è minore di* 180°.

fig. 25. Imperocchè sieno CD, DA due lati di un angolo sferico; è egli chiaro, che per terminare un triangolo sferico, debbano questi esser segati da un terzo arco AC, prima che si riuniscano di nuovo in B, alla distanza di 180° dal punto D. Dunque ec.

PROPOSIZIONE VI.

TEOREMA.

130. *La somma di due lati di un triangolo sferico è sempre maggiore del terzo.*

fig. 26. Sia ABC un triangolo sferico. Si compia il circolo ABD, e preso l'arco BE=BC, si tiri la corda EA la quale incontri in F il diametro BD, e si uniscano le FC, CA. Or se il cerchio BED s'intenda rivolgersi intorno al suo diametro BD, finchè il punto E coincida coll'altro C, coinciderà la EF colla FC, e

gli sarà uguale: che perciò, siccome le CF, FA sono maggiori di CA, così sarà anche la EA maggiore della CA; e quindi l'arco EBA, ossia CB+BA, dovrà esser maggiore dell'arco CA. C.B.D.

PROPOSIZIONE VII.

TEOREMA.

131. *La somma de' tre lati di un triangolo sferico* fig. 25. *è sempre minore di* 360°.

Sia il triangolo sferico ADC, i cui lati DA, DC si prolunghino fino ad incontrarsi di nuovo in B: ed essendo AC minore di AB+BC, ed AB+BC = 360° — AD — DC; sarà AC minore di 360° — AD — DC. Laonde aggiuntovi di comune AD+DC, sarà AC+AD +DC minore di 360°. C. B. D.

132. *Cor.* Quindi si potrà sempre supporre, che un triangolo sferico sia la base di un angolo solido, che ha per vertice il centro della sfera cui si appartiene un tal triangolo sferico, ed i cui angoli sono misurati da' lati di questo *. * 21. XI.

PROPOSIZIONE VIII.

TEOREMA.

133. *Se in un triangolo sferico, preso per polo ciascun vertice de' suoi angoli, si descrivano tre archi di cerchi massimi; questi incontrandosi formeranno un altro triangolo sferico, i cui lati, e gli angoli saranno supplementi degli angoli, e de' lati del proposto.*

fig. 27. PARTE I. Imperocchè essendosi descritto col polo A l'arco DE, è chiaro che il punto E sarà distante per 90° dall'altro A; ma col polo B si è descritto l'altro arco FE, che perciò lo stesso punto E, è anche a 90° di distanza da B: adunque il punto E sarà polo dell'arco AB. E così pure si dimostra, che D sia polo di AC, ed F di BC. Ciò posto, si prolunghi l'arco AB in G, e l'altro AC in H: e poichè GE=90° = DH, sarà GE + DH = 180° = DH + HE + GH = DE + GH. Ma GH è misura dell'angolo sferico
* 127. A*. Dunque DE è supplemento di A. Ed in simil guisa si dimostrerà essere DF supplemento di C, ed FE supplemento di B.

PARTE II. Si prolunghi GA in L, sarà GL misura dell'angolo E. Ma GA = 90° = BL, e perciò GA + BL, cioè GL + AB = 180°. Dunque l'angolo E è supplemento dell'arco AB. Ed in simil maniera si dimostrerà esser l'angolo F supplemento di BC, e l'angolo D supplemento di AC.

Adunque se in un triangolo sferico ec. C.B.D.

PROPOSIZIONE IX.

TEOREMA.

134. *La somma de' tre angoli di un triangolo sferico, è sempre maggiore di* 180°, *e minore di* 540°; cioè *maggiore di due retti, e minore di sei.*

PARTE I. Imperocchè se la somma degli angoli di un triangolo sferico non è maggiore di 180°; la somma de' lati del triangolo supplementale sarà 360°, o anche di più. Lo che ripugna*. * 131.

PARTE II. Che se la somma degli angoli di un triangolo sferico potesse pareggiar 540°, cioè 6 retti; o almeno un di essi dovrebbe esser maggiore di due retti, o ciascuno de' tre pareggiar due retti. E l' una cosa, e l' altra è impossibile; poichè in tal caso di questa stessa grandezza dovrebbero anch' essere gli angoli rettilinei, che rispettivamente gli pareggiano.

135. *Cor.* 1. Da ciò segue che: *prolungandosi un de' lati di un triangolo sferico, l' angolo esteriore è sempre minore de' due interiori, ed opposti.* Poichè questi insieme col terzo angolo del triangolo fanno più di 180°; mentre quello insieme collo stesso terzo angolo sono uguali a 180°.

136. *Cor.* 2. Che se un triangolo sferico ha un angolo retto, gli altri due possono essere o anche retti, o ottusi, o pure acuti; ma in quest' ultimo caso ciascun di essi deve esser sempre maggiore di 45°.

137. *Scol.* La somma degli angoli di un triangolo sferico potendo variare da 180° fino a 540°, ne segue, che ne' triangoli sferici non avviene come ne' rettilinei, che dati due angoli è dato anche il ter-

zo: che perciò i tre angoli di un triangolo sferico non formano due dati, come ne' rettilinei; ma tre distinti.

PROPOSIZIONE X.

TEOREMA.

fig. 28. n. 1. 138. *Due triangoli sferici che hanno i lati uguali l' un l' altro, e che sono nella stessa superficie sferica, hanno anche uguali gli angoli compresi da' lati uguali.*

Cas. 1. Sieno BAC, *bac* i triangoli sferici proposti; e primieramente i lati uguali corrispondansi alla stessa parte, cioè BA sia uguale a *ba*, CA a *ca*, e BC a *bc*. Sia inoltre O il centro della sfera alla quale essi si appartengono; e da questo punto s' intendano condotti i raggi a' vertici degli angoli de' proposti triangoli. È chiaro che si verranno in tal modo a costituire nel punto O due angoli solidi compresi ognuno da tre angoli uguali, l' un l' altro, che perciò questi si potranno far combaciare; ed allora cadrà il punto *a* in A, *c* in C, *b* in B: quindi il triangolo sferico *bac* combacerà coll' altro BAC; e perciò gli sarà uguale.

fig. 28. n. 2. *Cas.* 2. Che se que' lati uguali non si corrispondano, come si vede nella figura corrispondente, ove il lato BC del triangolo BAC è da una parte, e l'uguale *bc* nell'altro triangolo *bac* è dall'altra, in tal caso è chiaro, come la figura stessa rappresenta, che i due triangoli sferici BAC, *bac* sieno propriamente quelli, che sottendono due angoli solidi verticali posti al centro O di una sfera. Or si vede, che il piano BA*ba* s' inclina all' altro BC*bc* sotto un angolo, ch' è uguale sì a quello compreso dagli archi BA, BC, che dagli altri *ba*, *bc*. Laonde

i due angoli sferici ABC, *abc* sono tra loro uguali. E similmente si dimostrerà, che sia l'angolo ACB uguale all' altro *acb*, e l' angolo BAC uguale a *bac*. Dunque ec. C.B.D.

139. *Cor.* Da questa proposizione se ne deriva l' altra, che: *Se due triangoli sferici, che sono nella stessa superficie sferica, hanno gli angoli uguali, l' un l' altro; avranno anche uguali, l' uno all' altro, i lati che sottendono questi angoli.* Poichè avendo i triangoli proposti uguali rispettivamente gli angoli; i loro supplementali avranno uguali rispettivamente i lati: quindi dovranno essere equiangoli; e perciò i loro supplementali, cioè i proposti saranno equilateri tra loro. E ciò costituisce una differenza essenziale de' triangoli sferici da' rettilinei.

PROPOSIZIONE XI.

TEOREMA.

140. *Due triangoli sferici, che sono sulla medesima sfera, se hanno due lati uguali a due lati, l' un l' altro, e l' angolo compreso uguale all' angolo compreso; avranno la base uguale alla base.* fig. 28. n. 1.

Cas. 1. Sieno ABC, *abc* i triangoli sferici proposti, e sieno essi primieramente tali, che i lati uguali si corrispondano, in modo che sia BA = *ba*, BC = *bc*, e l' angolo B = *b*. Si congiungano le OA, OB, OC, O*a*, O*b*, O*c*. E poichè l' angolo sferico ABC è uguale all' altro *abc*, i piani OBC, O*bc* si dovranno similmente inclinare agli altri AOB, *a*O*b*: che perciò se l' un angolo solido si ponga dentro l' altro, essi dovranno combaciare: ed i punti A, C cadranno negli altri *a*, *c*: adunque l' arco AC coinciderà coll' altro *ac*, e gli sarà uguale.

fig. 28. n. 2. *Cas.* 2. Che se quei triangoli non sieno similmente disposti, come gli dinota la figura corrispondente, allora congiunto anche il centro O della sfera, cui essi si appartengono, co' punti A, B, C, *a*, *b*, *c*, è chiaro che essendo gli archi BA, BC uguali agli altri *ab*, *bc*, sien pure gli angoli AOB, BOC uguali agli altri *aOb*, *bOc*; ma di più i piani AOB, *aOb* sono similmente inclinati agli altri COB, *cOb*; poichè gli angoli ABC, *abc* si sono supposti uguali. Adunque è facile il vedere, che se pongasi il raggio BO in diretto coll' altro O*b*, debba il raggio AO essere in diretto con O*a*, e CO con O*c*: che perciò gli angoli AOC, *cOa* saranno uguali; e quindi anche gli archi AC, *ac*. C.B.D.

PROPOSIZIONE XII.

TEOREMA.

141. *Se due triangoli sferici di una stessa sfera, hanno un lato uguale ad un lato, e gli angoli adjacenti a questi lati sono anche uguali; saranno pure uguali i rimanenti lati, l' un l' altro, quelli, cioè, che sono opposti agli angoli uguali.*

fig. 28. n. 1. *Cas.* 1. Primieramente i proposti triangoli sferici BAC, *bac*, sieno disposti in modo, che si corrispondano gli angoli uguali, talchè essendo BA uguale a *ba*, sia l'angolo BAC = *bac*, e l'angolo ABC = *abc*; è manifesto, ch' essi si potranno far combaciare; e perciò sarà vero ciò che si è quì sopra enunciato.

fig. 28. n. 2. *Cas.* 2. Che se gli angoli uguali non si corrispondano; allora è chiaro, che congiunti i vertici degli angoli di ciascuno de' triangoli col centro O della sfera; se suppongasi che gli angoli uguali AOB, *bOa*

sieno verticali; debbano, per l'uguaglianza degli angoli sferici CBA, *cba*, i piani BOC, *b*Oc esser similmente inclinati allo stesso piano AB*ba*: che perciò questi ne costituiranno un solo; ed un solo piano costituiranno, per la stessa ragione, i due altri piani COA, *a*Oc. Adunque le CO, Oc rappresenteranno una sola linea retta; e quindi saranno uguali sì gli archi BC, *bc*, che gli altri CA, *ca*. C.B.D.

PROPOSIZIONE XIII.

TEOREMA.

142. *Gli angoli alla base di un triangolo sferico isoscele sono uguali tra loro.*

Ed un triangolo sferico, che ha due angoli uguali, ha pure uguali i lati che oppongonsi ad essi.

Parte I. Si divida per metà in D la base BC del triangolo sferico ABC, e per questo punto, e per l'altro A si faccia passare l'arco AD di cerchio massimo; è chiaro che i due triangoli sferici ABD, ACD, avendo i lati uguali, l'un l'altro, debbano avere anche uguali gli angoli in B, C, i quali sottendono gli uguali lati AC, AB. *fig.* 29.

Parte II. Il triangolo sferico BAC, avendo uguali gli angoli in B, C; il suo supplementale DFE dovrà avere uguali i lati EF, FD. Laonde anche gli angoli in D, E saranno uguali; e per conseguenza uguali saranno pure i loro supplementi, cioè i lati AC, AB del triangolo sferico proposto. *fig.* 27.

143. *Cor.* Quindi: *un triangolo sferico, ch'è equilatero, dev' essere anch' equiangolo*; ed al contrario: *un triangolo sferico equiangolo sarà equilatero.*

144. *Cor.* 2. Di più, dalla dimostrazione della Parte prima si rileva, che l'angolo ADB pareggi l'altro ADC; cioè che: *in un triangolo sferico isoscele, l'arco di cerchio massimo, che passa per lo vertice del triangolo, e per lo punto medio della sua base, è perpendicolare a questa.*

PROPOSIZIONE XIV.

TEOREMA.

145. *In ogni triangolo sferico, il maggior angolo è sotteso dal maggior lato, e il minore dal minore.*

Il maggior lato poi è sotteso dall' angolo maggiore ed il minore dal minore.

fig. 25. PARTE I. Sia ADC un triangolo sferico, in cui l'angolo C è maggiore dell'altro A; e per mezzo dell'arco C*d* si supponga fatto l'angolo AC*d* uguale a quello in A, sarà l'arco A*d*=C*d*; e quindi l'arco AD, ch'è quanto A*d*+*d*D, sarà uguale a C*d*+*d*D. Ma C*d* +*d*D è maggiore di CD*: dunque anche AD sarà maggiore di CD.

* 130.

PARTE II. Che se nel triangolo sferico ADC, il lato AD suppongasi maggiore dell'altro CD; l'angolo C dovrà esser maggiore dell'altro A. Poichè nel caso che gli si supponesse uguale, sarebbe l'arco AD=DC*; e supponendosi l'angolo C maggiore dell'altro A, ne risulterebbe l'arco CD maggiore di AD. E l'una, e l'altra cosa ripugna alla supposizione fatta.

* 142.

Adunque in ogni triangolo sferico ec. C.B.D.

ELEMENTI

DI

TRIGONOMETRIA.

LIBRO IV.

PRINCIPJ DI TRIGONOMETRIA SFERICA.

CAP. I.

PRINCIPJ GENERALI PER LA RISOLUZIONE DE' TRIANGOLI SFERICI.

146. Per brevità dinoteremo con A, B, C gli angoli di un triangolo sferico, indicando queste lettere, quelle che sono al vertice di essi, e con a, b, c esprimeremo que' lati di un tal triangolo, che sono rispettivamente opposti a quelli angoli.

147. *Def.* 1. La *Trigonometria Sferica* dà le regole per risolvere su i triangoli sferici quello stesso Problema, che la Trigonometria Piana risolve su i triangoli rettilinei, cioè: *Date tre di quelle che diconsi parti del triangolo sferico, non esclusi i tre angoli, determinare le tre parti che rimangono.*

148. *Scol.* Essendo sei le parti di un triangolo sferico, trigonometricamente considerato, delle quali in ogni quistione ne debbono esser date tre, non e-

sclusi i tre angoli; ne segue, che le combinazioni delle parti date a tre per volta, dovrebbero esser venti. Ma siccome in tali combinazioni alcune contengono la stessa specie di parti essendovene sei nelle quali sono sempre dati due angoli, ed un lato opposto ad uno di essi; sei altre in cui sono dati due lati, ed un angolo ad un di essi opposto; e così pure tre in cui sono dati due angoli, ed un lato adjacente; e tre altre in cui sono dati due lati, e l'angolo compreso; perciò le venti combinazioni suddette vengono ad esser comprese ne' sei casi seguenti, ne' quali resterà per conseguenza distinto il Problema generale sopra enunciato.

I°. *Se sien dati i tre lati.*

II°. *O i tre angoli.*

III°. *Se sien dati due lati, e l'angolo da essi compreso.*

IV°. *O pure due angoli, ed il lato che gli è adjacente.*

V°. *Se sien dati due lati, ed un angolo ad un di essi opposto.*

VI°. *O pure due angoli, ed un lato opposto ad un di essi.*

Or tutte le regole per la risoluzione di questi casi possono dedursi da' tre seguenti Teoremi.

PROPOSIZIONE I.

TEOREMA.

149. *In ogni triangolo sferico i seni de' lati sono come i seni degli angoli ad essi opposti.*

fig. 30. Sia CBA un triangolo sferico, ed i suoi lati CB,

CA, AB sieno archi di cerchi massimi di una sfera, il cui centro sia S, e si uniscano le CS, BS, AS. Ciò posto dal vertice di un qualsivoglia angolo C si tiri sul piano ad esso opposto ASB la perpendicolare CD; e poi da D su i lati SA, SB si calino le perpendicolari DE, DF, e si uniscano le CE, CF. E poichè il piano DEC è perpendicolare all' altro SAB* ed SE, che esiste in questo piano è perpendicolare alla loro comune sezione DE; sarà perciò essa anche normale al piano CED *; e quindi alla retta CE che giace in esso. Che perciò essendo le CE, ED perpendicolari, nello stesso punto E, alla comune sezione SA de' piani SAC, SAB in cui esse rispettivamente esistono; l' angolo CED dinoterà l' inclinazione di tali piani*. E similmente si dimostra, che l' angolo CFD sia quello d' inclinazione del piano CSB all' altro SBA. Laonde gli angoli CED, CFD, che rappresentano le inclinazioni di piani CSA, CSB, in cui esistono gli archi CA, CB, al piano ASB in cui è l' arco AB, si potranno prendere per gli angoli in A, e B del triangolo sferico CAB*.

* 18. VI.

* d. 4. XI.

* d. 6. XI.

* 127.

Or poichè nel triangolo rettilineo CED rettangolo in D sta

$$CE : CD :: R : \text{sen. CED}^*$$

* 92.

e similmente nell' altro triangolo rettangolo DCF, sta

$$CD : CF :: \text{sen. CFD} : R$$

sarà, per equalità perturbata,

$$CE : CF :: \text{sen. CFD} : \text{sen. CED.}$$

Ma CE, e CF sono rispettivamente i seni degli archi CA, CB, cioè b, a; e gli angoli CFD, CED sono lo stesso che gli angoli in B ed in A del triangolo sferico CAB. Adunque sarà

$$\text{sen. } b : \text{sen. } a :: \text{sen. B} : \text{sen. A}$$

E similmente si dimostrerà, che sia

sen. *a* : sen. *c* :: sen. A : sen. C.

Dalle quali due proporzioni si ricaverà finalmente, per equalità ordinata, la terza.

sen. *b* : sen. *c* :: sen. B : sen. C

Laonde i seni de' lati di un triangolo sferico ec. C. B. D.

150. *Scol.* Dalle tre' precedenti proporzioni si ricavano le seguenti equazioni, cioè

sen. *b* sen. A = sen. *a* sen. B
sen. *a* sen. C = sen. *c* sen. A
sen. *b* sen. C = sen. *c* sen. B

Per mezzo delle quali si risolvono facilmente i casi enunciati ne' precedenti numeri V., e VI., come si vedrà qui appresso.

PROPOSIZIONE II.

TEOREMA.

151. *Il coseno di un lato di un triangolo sferico, è uguale al prodotto de' coseni degli altri due lati, aggiuntovi il prodotto de' seni di questi nel coseno dell' angolo da essi compreso.*

fig. 30. Si supponga fatto l'apparecchio stesso del precedente Teorema, e poi dal punto E si tiri la EG perpendicolare alla SB, e per D si tiri alla stessa SB la parallela DH. Ed essendo gli angoli GES, GSE uguali ad un retto, essi pareggeranno l'angolo SED, ch' è retto: laonde togliendone di comune l'angolo GES, resterà l'angolo GSE, o BSA uguale ad HED.

Or nel triangolo EHD rettangolo in H, dev' essere HD=DE sen.DEH=DE sen.BSA=DE sen.c; ed è poi DE=EC sen.ECD=EC cos.DEC=sen.b cos.A. Laonde sarà HD = GF = sen.b sen.c cos.A. Ma SG=SE cos.ESG=SE cos.c ; ed SE=SC cos.ESC = 1 × cos.b, , (prendendo il raggio SC della sfera ABDC per raggio trigonometrico, e quindi = 1). Adunque sarà SG = cos.b cos.c. Per lo che essendo SF = SG + GF, sarà, sostituendo cos.a ad SF, e per SG, e GF o DH i loro rispettivi valori trigonometrici quassù ritrovati,

$$\cos.a = \cos.b \cos.c + \text{sen.}b \text{ sen.}c \cos.A$$

E poichè tal dimostrazione regge ugualmente per cos.a, che per cos.b, e per cos.c; perciò, trasmutando nell' equazion precedente l'a in b, o in c: ed al contrario, l'A in B, o in C, se ne otterranno le altre due

$$\cos.b = \cos.a \cos.c + \text{sen.}a \text{ sen.}c \cos.B$$
$$\cos.c = \cos.b \cos.a + \text{sen.}b \text{ sen.}a \cos.C$$

In generale il coseno di un lato è uguale ec. C.B.D.

152. *Cor.* 1. Se nella prima equazione di questo Teorema si sostituisca il valore di cos.c preso dalla terza di esse, e l'altro di sen.$c = \dfrac{\text{sen.}a \text{ sen.C}}{\text{sen.A}}$, che si ricava dalla seconda equazione dello Scolio precedente, ne risulterà

$$\cos.a = \cos.b \ (\cos.b\cos.a + \text{sen.}b \text{ sen.}a \cos.C) + \text{sen.}b \text{ sen.}a \text{ sen.C} \times \frac{\cos.A}{\text{sen.A}}$$

dal quale prendendo il valore di $\dfrac{\cos.A}{\text{sen.A}}$, cioè di cot.A sarà

$$\text{cot.A} = \frac{\cos.a(1 - \cos.b^2) - \text{sen.}b \text{ sen.}a \cos.b \cos.C.}{\text{sen.}b \text{ sen.}a \text{ sen.C}}$$

E ponendo in tal' espressione $\text{sen.}b^2$ per $1 - \cos.b^2$, $\cot.a$ per $\frac{\cos.a}{\text{sen.}a}$, e $\cot.C$ per $\frac{\cos.C}{\text{sen.}C}$; si avrà

$$\cot.A = \cot.a \frac{\text{sen.}\, b}{\text{sen.}C} - \cos.b \cot.C$$

E se in vece di eliminar dalla prima equazione $\cos.c$, e $\text{sen.}c$, si fosse eliminato $\cos.b$, e $\text{sen.}b$; si sarebbe trovato ugualmente

$$\cot.A = \cot.a \frac{\text{sen.}\, c}{\text{sen.}B} - \cos.c \cot.B.$$

153. *Cor.* 2. Eliminando similmente nella seconda equazione del Teorema $\cos.c$, e $\text{sen.}c$, o pur $\cos.a$, e $\text{sen.}a$, si otterrebbero i due valori di $\cot.B$ analoghi a' poc' anzi rinvenuti per $\cot.A$. e nel modo stesso coll' eliminazione di $\cos.a$, e $\text{sen.}a$, o pur di $\cos.b$., e $\text{sen.}b$ nella terza di esse, si otterrebbero due espressioni corrispondenti a $\cot.C$, cioè si avranno le seguenti quattro formole

$$\cot.B = \cot.b \frac{\text{sen.}\, a}{\text{sen.}C} - \cos.a \cot.C$$

$$\cot.B = \cot.b \frac{\text{sen.}\, c}{\text{sen.}A} - \cos.c \cot.A$$

$$\cot.C = \cot.c \frac{\text{sen.}\, a}{\text{sen.}B} - \cos.a \cot.B$$

$$\cot.C = \cot.c \frac{\text{sen.}\, b}{\text{sen.}A} - \cos.b \cot.A$$

Ma tali formole di $\cot.B$, e $\cot.C$, come di leggieri si comprede, e come lo mostra anche la semplice inspezione di esse, si possono facilmente ottenere permutando nelle due già avute per $\cot.A$, l'A in B, o in C e l'a in b, o in c. E noi in appresso tutte le volte, che ottenutasi una formola per un caso, si cercassero le altre pe' casi analoghi, ci limiteremo ad indicare il

semplice cambiamento di lettere, che dovrà farsi in quella, per ottener queste.

154. *Scol.* Siccome dato il seno di un arco è anche dato il suo coseno; così ciascuna delle tre equazioni del presente Teorema, la quale esprime il rapporto, che v'è tra un lato di un triangolo sferico cogli altri due, e coll'angolo che essi comprendono, non contiene che solamente quattro grandezze indeterminate; e perciò è chiaro, che date tre di queste si potrà determinar la quarta. Così se sien dati nella prima equazione sen. b, sen. c, e cos. A, vale a dire due lati, e l'angolo compreso; si potrà determinare il terzo lato. E se fossero dati i tre lati, e quindi cos.a, cos.b, cos.c, sen.b, sen.c, si potrebbero determinar gli angoli. Quì appresso faremo vedere, come per mezzo delle equazioni suddette, e di quelle de' Coroll. si possano risolvere completamente tutti i casi contenuti ne' num. I. e III. del §. 148.

PROPOSIZIONE III.

TEOREMA.

155. *Il coseno di un angolo è uguale al prodotto del coseno del lato opposto, ne' seni degli altri due angoli, toltone il prodotto de' coseni di questi.*

Dinotino A', B', C' gli angoli del triangolo supplementale del proposto, ed a', b', c', i lati di esso sarà

$$\cos.a' = \cos.b' \cos.c' + \text{sen.}b' \text{ sen.}c' \cos.A' \text{ *.} \quad \text{* 151.}$$

Ma $\cos.a' = -\cos.A$ *; $\cos.b' = -\cos.B$; * 20.

$\cos.c' = -\cos.C$, $\text{sen.}b' = \text{sen.}B$ *; $\text{sen.}c' = \text{sen.}C$; * 11.

$\cos.A' = -\cos.a$.

Adunque fatte queste sostituzioni, e poi multiplicando per — 1 il risultamento, si avrà

$$\text{cos.A} = \text{cos.}a\ \text{sen.B sen.C} - \text{cos.B cos.C}$$

E cambiando in quest' equazione una volta l'A in B, e l'a in b, ed al contrario; ed un altra volta l'A in C, e l'a in c, ed al contrario; se ne otterranno le altre due analoghe per cos.B, e cos.C; cioè

$$\text{cos.B} = \text{cos.}b\ \text{sen.A sen.C} - \text{cos.A cos.C}$$

$$\text{cos.C} = \text{cos.}c\ \text{sen.B sen.A} - \text{cos.B cos.A}$$

156. *Cor.* Se si facciano sull' equazione

$$\text{cos.A} = \text{cos.}a.\ \text{sen.B. sen.C} - \text{cos.B cos.C}$$

le stesse operazioni, che si sono fatte nel Coroll. 1. del Teorema precedente si otterranno per cot.a le due seguenti espressioni, cioè

$$\text{cot.}a = \text{cot.A}\ \frac{\text{sen.B}}{\text{sen.}c} + \text{cot.}c\ \text{cos.B}$$

$$\text{cot.}a = \text{cot.A}\ \frac{\text{sen.C}}{\text{sen.}b} + \text{cot.}b\ \text{cos.C}$$

Nelle quali praticandovi lo stesso cambiamento di lettere poc' anzi indicato, se ne otterranno due altre analoghe per cot.b, e due altre per cot.c, che sono le seguenti, cioé

$$\text{cot.}b = \text{cot.B}\ \frac{\text{sen.A}}{\text{sen.}c} + \text{cot.}c\ \text{cos.A}$$

$$\text{cot.}b = \text{cot.B}\ \frac{\text{sen.C}}{\text{sen.}a} + \text{cot.}a\ \text{cos.C}$$

$$\text{cot.}c = \text{cot.C}\ \frac{\text{sen.B}}{\text{sen.}a} + \text{cot.}a\ \text{cos.B}$$

$$\text{cot.}c = \text{cot.C}\ \frac{\text{sen.A}}{\text{sen.}a} + \text{cot.}b\ \text{cos.A}$$

e questi valori di cot.a, cot.b, cot.c, si sarebbero anche potuto ottenere, risolvendo, per rapporto a tali quantità, l'equazioni che si sono ottenute ne' numeri 152, e 153, esprimenti i valori di cot.A, cot.B, cot.C.

157. *Scol.* Da ciascuna delle tre equazioni rinvenute nel presente Teorema si rileva, che dandosi in un triangolo sferico due angoli, e 'l lato che gli è adjacente, si può determinare l'angolo opposto a questo. Così per esempio, nella prima di esse, dandosi sen.B, sen.C, e quindi cos.B, cos.C, e di più cos.*a*, si farà noto cos.A. E dandosi i tre angoli, si potrà per mezzo di esse determinare ciascuno de' lati. Vale a dire che da questo terzo Teorema restano risoluti gli altri casi compresi ne' num. II. e IV. del §. 148.

CAP. II.

Riduzione delle formole precedenti, nel caso che il triangolo sferico abbia un angolo retto.

158. Le formole semplicissime, che si sono ne' precedenti numeri rinvenute, e per mezzo delle quali con facilità risolvonsi i triangoli sferici, come quì appresso faremo vedere, restano agevolmente modificate nel caso, che il triangolo sferico abbia un angolo retto.

fig. 31. Per ottener queste riduzioni si supponga, che il triangolo sferico ABC abbia retto l'angolo in A; e quindi che ne sia il lato a l'ipotenusa: egli è chiaro che dovrà in questo caso esser sen. A = 1, e cos. A = 0.

159. Ciò posto sostituendo 1 per sen. A, nelle prime due analogie recate in fine del n.° 149, esse si ridurranno a queste altre

$$\text{sen.}a : \text{sen.}b :: 1 : \text{sen.B}$$
$$\text{sen.}a : \text{sen.}c :: 1 : \text{sen.C}$$

Dalle' quali si rileva, che: *In ogni triangolo sferico rettangolo, il seno dell' ipotenusa sta al seno di un lato, come il raggio al seno dell' angolo opposto ad un tal lato.*

160. Inoltre ponendo o per cos. A nella prima equazione del n.° 151, questa si ridurrà a

$$\text{cos.}a = \text{cos.}b\ \text{cos.}c$$

e quindi si rileverà essere

$$1 : \text{cos.}b :: \text{cos.}c : \text{cos.}a$$

cioè: *Il raggio sta al coseno di un lato, come il coseno dell' altro lato al coseno dell' ipotenusa.*

161. Or le due formole esprimenti cos.B, e cos.C rinvenute nel numero 155. riduconsi nel presente caso a

$$\cos.B = \cos.b \text{ sen.C}$$
$$\cos.C = \cos.c \text{ sen.B}$$

e queste due equazioni danno le seguenti analogie, cioè

$$1 : \cos.b :: \text{sen.C} : \cos.B$$
$$1 : \cos.c :: \text{sen.B} : \cos.C$$

ciascuna delle quali indica, che: *Il raggio sta al coseno di un lato, come il seno dell' angolo adjacente al coseno dell' angolo opposto.*

162. Ponendo cos. A = o nella prima equazione del n.° 155, essa diverrà

$$\cos.a \text{ sen.B sen.C} - \cos.B \cos.C = o$$

che risoluta per rapporto a cos.*a*, dà

$$\cos.a = \frac{\cos.B}{\text{sen.B}} \times \frac{\cos.C}{\text{sen.C}}$$

e quindi $\cos.a \times \text{tang.B} = \text{cot.C}$
o pure $\cos.a \times \text{tang.C} = \text{cot.B}$

le quali due equazioni si ottengono dividendo la precedente, una volta per lo primo fattore del secondo membro di essa, ed un' altra volta per lo secondo; e poi praticando le ovvie riduzioni. Finalmente da tali equazioni se ne ricaveranno le seguenti due analogie

$$1 : \cos.a :: \text{tang.B} : \text{cot.C}$$
$$1 : \cos.a :: \text{tang.C} : \text{cot.B}$$

ciascuna delle quali dà luogo al seguente Teorema: *Il raggio sta al coseno dell' ipotenusa, come la tangente di un angolo alla cotangente dell' altro.*

163. Siccome essendo l'angolo A di 90°, il suo complemento è zero, così cot.A = 0; il qual valore sostituito nelle due espressioni di cot.*a* recate nel n.° 156, darà

$$\text{cot}.a = \text{cot}.c \cos.B$$
$$\text{cot}.a = \text{cot}.b \cos.C$$

dalle quali due equazioni si ricaveranno le seguenti analogie

1 : cos.B :: cot.*c* : cot.*a*, cioè :: tang.*a* : tang.*c*
1 : cos.C :: cot.*b* : cot.*a*, cioè :: tang.*a* : tang.*b*

Le quali c'indicano, che: *Il raggio sta al coseno di un angolo, come la tangente dell'ipotenusa a quella del lato adjacente ad un tal angolo.*

164. Finalmente ponendo sen.A = 1, e cos.A = 0 in que' valori di cot.*b*, e cot.*c* del numero 156, ne' quali si contengono le suddette linee trigonometriche dell'angolo A, essi si ridurranno a' seguenti, cioè

$$\text{cot}.b = \frac{\text{cot}.B}{\text{sen}.c}$$
$$\text{cot}.c = \frac{\text{cot}.C}{\text{sen}.b}$$

e quindi sarà

1 : sen.*c* :: cot.*b* : cot.B, o sia :: tang.B : tang.*b*
1 : sen.*b* :: cot.*c* : cot.C, o sia :: tang.C : tang.*c*

dalle quali due analogie si ha poi permutando

1 : tang.B :: sen.*c* : tang.*b*
1 : tang.C :: sen.*b* : tang.*c*

cioè: *Il raggio sta alla tangente di un angolo, come il seno del lato adjacente ad esso alla tangente del lato che gli è opposto.*

165. *Cor.* 1. Essendosi dimostrato nella prima analogia del precedente numero, che stia 1 : tang.B :: sen.*c* : tang.*b*, siccome sen.*c* è sempre dello stesso se-

gno del primo termine di questa proporzione, il qual rappresenta il seno massimo, così dovrà pure tang.B essere del segno stesso di tang.*b*. E similmente rilevandosi dalla seconda di esse, che tang.C debba sempre essere del segno stesso di tang.*c*, se ne potrà conchiudere, che: *Ne' triangoli sferici rettangoli, ciascun lato è della stessa specie dell' angolo, che gli è opposto*; cioè che il numero de' gradi per ciascun di essi è o minore di 90°, o pur maggiore.

166. *Cor.* 2. Inoltre nella stess' analogia, essendo 1 > sen.*c*, dovrà essere anche tang.B > tang.*b*. Quindi se mai i segni di queste tangenti sieno positivi, cioè, che B, e *b* sieno archi ciascuno minore di 90°, sarà B > *b*; se poi saranno negativi, e perciò B, e *b* ciascuno maggiore di 90°, sarà B < *b*. E verificandosi lo stesso per gli archi C, *c*; sarà vero, che: *Ne' triangoli sferici rettangoli, ogni angolo obbliquo non può mai esser minor se acuto, maggiore se ottuso, del lato che gli è opposto.*

167. *Scol.* Le formole di riduzione de' numeri 159, 160, 161, 162, 163, 164, che abbiamo espresse anche in forma enunciativa, per renderle più ritenevoli, ed anche per mostrare la loro corrispondenza co' Teoremi di Trigonometria Sferica, che nelle ordinarie istituzioni di questa scienza si propongono, sono sufficienti, come tra poco si vedrà, alla completa, e facile risoluzione de' triangoli sferici rettangoli.

CAP. III.

Applicazione de' principj stabiliti nel precedente capitolo all'effettiva risoluzione de' triangoli sferici.

168. Le parti di un triangolo sferico possono in modo combinarsi tre a tre, come si è veduto nel numero 148, che ne risultino sei casi assolutamente diversi, alla risoluzione de' quali sono sufficienti que' principj che dal §. 149. in poi abbiamo stabiliti, come passeremo a mostrare ne' seguenti §§. Intanto per serbare, per quanto si può, l'uniformità di questo Trattato con quello di Trigonometria Rettilinea, ed anche per proceder gradatamente, incominceremo dalla

Risoluzione de' triangoli sferici rettangoli.

fig. 24. 169. Se un triangolo sferico EAF avesse retti i due angoli sferici in E, F; dovrebbero i piani de' cerchi ADB, AFB esser perpendicolari e quello del cerchio HEFK, al quale sarebbe per conseguenza anche perpendicolare la comune sezione BA di que' primi cerchi. Laonde il punto A essendo il polo del cerchio HEFK, gli archi AE, AF, che sono que' lati del triangolo sferico proposto, i quali sottendono i suoi due angoli retti, dovranno esser ciascuno di 90°: ed al contrario si vede chiaramente, che se i lati AE, AF del triangolo sferico EAF fossero ciascuno di 90°, gli angoli in E, F di tal triangolo, opposti a que' la-

ti, dovrebbero esser retti. Adunque in un triangolo sferico, che ha due angoli retti, il valore de' lati opposti a questi si ha per la natura stessa di tal triangolo. Ma poichè di queste quattro cose date, due si hanno per immediata conseguenza dalle altre due; perciò non sono in realtà che due soli dati, e quindi non si potrà da esse risolvere un tal triangolo, cioè determinare il rimanente angolo, ed il lato che gli è opposto; tanto più, che come facilmente s'intende, questi dati possono appartenersi non solamente al triangolo EAF, ma ad ogni altro DAF, CAF, ec., ne' quali il rimanente angolo, ed il lato opposto si variano continuamente. Quello che solamente si sa, è, che il terzo lato, ed il terzo angolo sono uguali tra loro, sicchè dato l'uno si ha anche l'altro: che perciò se il terzo angolo EAF si fosse supposto anche retto, il lato EF sarebbe pure di 90°. Vale a dire, che un triangolo sferico, che ha tre angoli retti ha tutti i tre lati di 90°, e quindi resta da se stesso risoluto. Adunque non ci resta a considerare pel nostro oggetto, che solamente quei triangoli sferici rettangoli, che hanno un solo angolo retto; il che eseguiremo nel seguente Problema.

PROPOSIZIONE IV.

PROBLEMA.

170. *In un triangolo sferico rettangolo, date due delle sue parti, oltre l'angolo retto; determinare le rimanenti.*

Caso I.

fig. 31. Sien dati i cateti CA, AB [b, c], e si cerchino l'ipotenusa, e gli altri due angoli

1.° L'ipotenusa BC [a] resterà determinata per mezzo dell'equazione

* 160. $$\cos.a = \cos.b \cos.c$$ *

dalla quale si farà noto $\cos.a$, e l'arco a apparirà dalle Tavole. Se però $\cos.a$ risulti negativo, un tal arco sarà il supplemento di quello, che nelle Tavole si * 20. sarà rinvenuto*.

2.° L'angolo B, e l'altro C si avranno poi mediante le due seguenti equazioni analoghe, l'un l'altra, ricavate dalle due analoghe, anche tra loro, del n.° 164.

$$\text{tang.B} = \frac{\text{tang.}b}{\text{sen.}c} \qquad \text{tang.C} = \frac{\text{tang.}c}{\text{sen.}b}$$

Caso II.

Che se dasi un cateto AC [a], e l'ipotenusa BC [b]; e si cerchi l'altro cateto AB, e ciascun degli angoli B, C alla base.

1.° Il cateto AB [c] resta determinato dall' equazione

$$\cos.c = \frac{\cos.a}{\cos.b} \quad * \qquad * \text{ 160.}$$

2.° L' angolo obbliquo C adjacente al lato dato resta determinato dall' equazione

$$\cos.C = \frac{\text{tang}.b}{\text{tang}.a} \quad * \qquad * \text{ 163.}$$

3.° E l' altro angolo acuto B, che gli è opposto, si otterrà per mezzo dell' equazione

$$\text{sen}.B = \frac{\text{sen}.b}{\text{sen}.a} \quad * \qquad * \text{ 159.}$$

La specie di un tal angolo non sarà dubbia, sebbene espressa dal seno ; poichè è la stessa di quella del lato AC, che gli è opposto*. * 166.

Caso III.

E dandosi l' ipotenusa BC [a], ed un degli angoli obbliqui B.

1.° Il lato AC [b] opposto a quest' angolo si otterrà per mezzo dell' equazione

$$\text{sen}.b = \text{sen}.a \ \text{sen}.B \quad * \qquad * \text{ 159.}$$

Nè la specie di un tal lato sarà dubbia.

2.° L' altro lato AB [c] adjacente all' angolo B resta determinato dall' equazione

$$\text{tang}.c = \cos.B \ \text{tang}.a \quad * \qquad * \text{ 163.}$$

3.° Finalmente il rimanente angolo C vien determinato dall' equazione

$$\text{cot}.C = \cos.a \ \text{tang}.B \quad * \qquad * \text{ 162.}$$

Caso iv.

Che se dias' un lato AC [b], e l' angolo C che gli è adjacente.

1.° Si avrà l' ipotenusa BC [a] per mezzo dell' equazione

* 163. $$\text{tang.}a = \frac{\text{tang.}b}{\text{cos. C}}$$ *

2.° L' altro cateto AB [c] si avrà dall' equazione

* 164. $$\text{tang.}c = \text{tang.C sen.}b$$ *

3.° Finalmente per avere il rimanente angolo B si dovrà far uso dell' equazione

* 161. $$\cos.B = \text{sen.C cos.}b$$ *

Caso v.

Se poi diansi il lato AC [b], e l' angolo B che gli è opposto.

1.° L' ipotenusa BC [a] si avrà col fare

* 159. $$\text{sen.}a = \frac{\text{sen.}b}{\text{sen.}B}$$ *

2.° L' altro cateto AB [c] si avrà per mezzo dell' equazione

* 164. $$\text{sen.}c = \frac{\text{tang.}b}{\text{tang.}B}$$ *

3.° Ed il rimanente angolo C si otterrà dall' equazione

* 151. $$\text{sen.C} = \frac{\cos.B}{\cos.b}$$ *

fig. 32. Questo caso è *dubbio*; poichè è chiaro, che prolungandosi i lati BC, BA del proposto triangolo sferico, finchè s' incontrino in D; l' angolo B sarà ugua-

le all'altro D* che perciò gli stessi dati si appar- * 127.
terranno sì al triangolo sferico BAC, che all'altro DAC. Laonde non si potrà mai venire in cognizione se l'ipotenusa del triangolo che si risolve, sia l'arco BC minore di un quadrante, o pur l'altro DC che n'è il supplemento: e similmente non potrà determinarsi, se l'altro lato, e l'angolo ignoti sieno BA, e BDA, o pure i loro supplementi rispettivi DA, e DCA, a meno che le circostanze della quistione non tolgano quest'incertezza.

Caso vi.

Finalmente se sien dati gli altri due angoli B, C.

1.° L'ipotenusa BC [a]; si avrà dall'equazione

$$\cos.a = \frac{\cot.C}{\tan g.B}$$ *

* 162.

2.° Un de' cateti AB [c] si rinverrà facendo

$$\cos.c = \frac{\cos.C}{\text{sen.}B}$$ *

* 161.

e l'altro AC [b] con farsi similmente

$$\cos.b = \frac{\cos.B}{\text{sen.}C}$$

Ed ecco risoluti tutti i casi de' triangoli sferici rettangoli. C.B.F.

RISOLUZIONE DE' TRIANGOLI SFERICI OBBLIQUANGOLI.

PROPOSIZIONE V.

PROBLEMA.

171. *In un triangolo sferico obbliquangolo, date tre delle sue parti; determinare le rimanenti.*

CASO I.

fig. 33. Sien dati in primo luogo i tre lati BC, CA, AB, [a, b, c] e si cerchino gli angoli A, B, C.

* 155. L' equazione $\cos.a = \cos.b \cos.c + \text{sen}.b \text{ sen}.c \cos.A$ *

darà . . . . $\cos.A = \dfrac{\cos.a - \cos.b \cos.c}{\text{sen}.b \text{ sen}.c}$

Onde si avrà il coseno dell' angolo A; e quindi quest' angolo. E similmente si determineranno gli altri, risolvendo, cioè, le due altre equazioni del n.° 151, per determinare cos.B, e cos.C. Ed è chiaro, che in questo caso non resti dubbio sulla specie di ciascuno degli angoli; poichè essendo essi esibiti da' coseni, la specie loro resterà fissata dal segno di questi. E lo stesso può dirsi de' tre seguenti casi.

CASO II.

In secondo luogo sieno dati i tre angoli A, B, C, e si cerchino i lati BC, CA, AB, [a, b, c].

Si avrà il lato BC [a] per mezzo dell' equazione

* 155. $\cos.A = \text{sen}.B \text{ sen}.C \cos.a - \cos.B \cos.C$ *

dalla quale si ricava

$$\cos.a = \frac{\cos.A + \cos.B \cos.C}{\text{sen.B sen.C}}$$

E per mezzo delle corrispondenti equazioni

$$\cos.b = \frac{\cos.B + \cos.A \cos.C}{\text{sen.A sen.C}}$$

$$\cos.c = \frac{\cos.C + \cos.B \cos.A}{\text{sen.B sen.A}}$$

si determineranno gli altri due lati AB, AC [b, c].

Caso III.

Che se diensi due lati AC, AB [b, c], e l'angolo A da essi compreso; si determinerà il terzo lato BC [a], per mezzo dell'equazione

$$\cos.a = \cos.b \cos.c + \text{sen.}b \text{ sen.}c \cos.A$$ * * 251.

Ed il triangolo si terminerà di risolvere come nel Caso 1. E se vogliansi ottenere i rimanenti angoli B, C senza prima determinare il lato BC [a]; si adopreranno le seguenti equazioni

$$\text{cot.B} = \cot.b \frac{\text{sen.}c}{\text{sen.A}} - \cos.c \cot.A$$

$$\text{cot.C} = \cot.c \frac{\text{sen.}b}{\text{sen.A}} - \cos.b \cot.A$$ * * 153.

Caso IV.

E dandosi due angoli B, C, ed il lato BC [a], che gli è adjacente. Si avrà il terzo angolo A per mezzo dell'equazione

$$\cos.A = \text{sen.B sen.C} \cos.a - \cos.B \cos.C$$ * * 155.

E le rimanenti parti del triangolo si otterranno come nel Caso 2. Che se queste vogliansi indipendentemente

dalla determinazione dell' angolo A, bisognerà cercarle per mezzo dell' equazioni

$$\cot.b = \cot.B \frac{\text{sen.C}}{\text{sen.}\,a} + \cos.C \cot.a$$

* 156.

$$\cot.c = \cot.C \frac{\text{sen.B}}{\text{sen.}\,a} + \cos.B \cot.a \quad *$$

Caso v.

In quinto luogo le parti date del triangolo sieno i due lati AC, AB [b, c], e l' angolo B opposto ad uno di essi.

1.° Per aver l' angolo C, che sta opposto all' altro lato, bisognerà servirsi dell' equazione

* 150.

$$\text{sen.C} = \frac{\text{sen.B sen.}c}{\text{sen.}b} \quad *$$

È chiaro, che in questo caso la specie dell' angolo C sarà *dubbia*: un tal angolo C sarà però sempre maggiore dell' altro B, nel caso che si sappia, che * 145. il lato c sia maggiore di b; ed al contrario. *

2.° Il terzo lato CB [a] si avrà pareggiando tra loro i due valori di cot.A, che si sono ottenuti nel n.° 152; e determinando per mezzo di quest' equazione il valore di cot.a.

3.° Finalmente il rimanente angolo A, o si determinerà per mezzo del n.° 149, o pure se si voglia determinare indipendentemente dal lato BC [a], bisognerà cercarlo maneggiando l' equazione che risulta dal pareggiamento de' valori di cot.a, ottenuti nel n.° 156.

Caso vi.

Sien dati finalmente due angoli B, C, e 'l lato AB [b] opposto ad un di essi.

Per avere il lato AB [c] opposto all' altro angolo si farà uso dell' equazione

$$\text{sen.}c = \frac{\text{sen.}b \text{ sen.C}}{\text{sen.B}} \quad * \qquad * \text{ 150.}$$

Ed il terzo angolo A, ed il lato BC [c], che gli è opposto, si potranno determinare come nel Caso precedente. Le parti del triangolo dimandate in questo caso, sono *dubbie*, come nel precedente.

Adunque si è soddisfatto a quello che dimandavasi in questo Problema. C.B.F.

CAP. IV.

Di alcuni triangoli sferici la cui risoluzione dipende da quella de' triangoli sferici rettangoli.

PROPOSIZIONE VI.

PROBLEMA.

172. *Risolvere un triangolo sferico, quando tra le tre parti date di esso vi sia un lato di* 90.°

fig. 27. Sia ABC un triangolo sferico, e BC il suo lato di 90°. E poichè descritto il triangolo supplementale DFE, l'angolo F deve anche essere di 90.°; perciò questo triangolo supplementale sarà rettangolo: ed inoltre saranno date in un tal triangolo DEF quelle altre due sue parti, che sono i supplementi rispettivi delle parti date nel triangolo BAC*. Laonde il * 133. triangolo DFE potrà risolversi *: e determinate che si saranno le sue rimanenti parti, resteranno anche determinate le loro corrispondenti nel triangolo BAC, cioè quelle che ne sono i rispettivi supplementi: che perciò si sarà risoluto il triangolo BAC. * 170.

173. *Scol.* Il triangolo sferico ABC, che ha un lato di 90.° da taluni trigonometri moderni suol chiamarsi *rettilatero*.

PROPOSIZIONE VII.

PROBLEMA.

174. *Risolvere un triangolo sferico isoscele.*

Abbia il triangolo sferico BAC i lati BA, AC uguali, e dal vertice A si conduca al punto medio D del lato opposto BC l'arco di cerchio massimo AD, il quale dividerà il triangolo BAC in due triangoli rettangoli; ed è chiaro, che la risoluzione del triangolo BAC si ridurrà a quella di uno di questi triangoli rettangoli. fig. 29.

PROPOSIZIONE VIII.

PROBLEMA.

175. *Risolvere un triangolo sferico in cui due lati sieno supplementi l'uno dell'altro.*

Sia BAC il triangolo sferico proposto, in cui i lati AB, AC sieno supplementi l'uno dell'altro. Si prolunghi uno di questi due lati AB, finchè s'incontri in D col terzo lato BC: sarà AD uguale ad AC, e quindi il triangolo CAD essendo isoscele si potrà risolvere come nel Problema precedente. Ma i triangoli BAC, ADC sono in modo connessi, che dalle parti dell'un triangolo sono sempre determinabili quelle dell'altro; giacchè i lati AB, e BC dell'uno sono supplementi de' lati AD, DC dell'altro, il lato AC è comune, gli angoli in B, e D sono uguali, e gli angoli BAC, BCA sono supplementi de- fig. 34.

gli angoli DAC, DCA. Adunque la risoluzione del triangolo BAC dipende da quella del triangolo isoscele ADC.

176. *Scol.* É facile il vedere, che nel triangolo proposto ABC debba esser anche l'angolo ABC supplemento dell'angolo BCA. Poichè essendo l'angolo ACB supplemento dell'altro ACD, lo sarà anche dell'angolo
* 142. in D, ch'è uguale all'angolo ACD*; e quindi dell'al-
* 127. tro in B, ch'è uguale a quello in D*.

CAP. V.

RICERCHE GEOMETRICHE INTORNO A' CASI DUBBJ NELLA RISOLUZIONE DE' TRIANGOLI SFERICI.

177. Le presenti ricerche hanno per oggetto il mostrare geometricamente, come possano aver luogo i casi dubbj de' quali si è detto ne' num. V. e VI della Prop. V., o sia in qual modo si verifichi che cogli stessi dati, cioè due lati ed un angolo opposto ad un di essi, o due angoli ed un lato opposto, possansi costruire due triangoli sferici diversi: ed entreremo a tal proposito ad esaminare, per quali valori particolari de' lati la quistione resti dubbia, e per quali altri non lo sia. Finalmente cercheremo di restringere per mezzo di alcune regole, al più ch' è possibile, la dubbiezza di tali casi.

178. Sia l' angolo sferico BAC, i cui lati BA, AC si prolunghino finchè s' incontrino in A′: e suppongasi primieramente l' angolo in A, o il suo uguale in A′ esser minore del retto, cioè minore di 90°. Inoltre prendasi l' arco AB minore del quadrante, e dal punto B si abbassi sopra di ACA′ l' arco perpendicolare BD: egli è chiaro che prendendo, a destra ed a sinistra del punto D, gli archi uguali Dc, DC, gli archi di cerchi massimi Bc, e BC sieno anche uguali; ed inoltre che l' angolo sferico BcA sia supplemento dell' altro BCA. Imperocchè gli angoli BcA, BcA′ sono uguali a due retti, del pari che gli altri BCA, BCA′, e di essi l' angolo BcC è uguale all' altro BCc; fig. 35.

quindi dovrà il rimanente angolo BcA essere uguale al rimanente BCA′: che perciò l'angolo BcA del pari che l'altro BCA′ sarà supplemento dell'angolo BCA. Adunque essendo dati l'angolo A, e gli archi *a*, ch'è il lato opposto a quell'angolo, e *c* ch'è il lato adjacente, s'ignorerà se si risolva il triangolo BAC, o pur l'altro BAc. Ciò però ha un limite; perchè se CB si faccia uguale a BA, diverrà un solo il triangolo da risolversi, e la sua risoluzione rientrerà nel metodo esposto al n.° 174. E divenendo CB > BA, l'arco BE uguale a BC dovrebbe incontrare l'arco AC al di là del punto A: ond'è che co' dati proposti non potrebbe ottenersi che il solo triangolo BAC, mentrè l'altro BAE non ha più per un de' dati l'angolo BAC ma il suo supplemento BAE.

E supponendo l'arco AB′ [*c*] maggiore di un quadrante, cioè di 90°; ed abbassando da B′ sull'arco ACA′ la perpendicolare B′D′, si vede similmente, che per ogni due punti C′, *c*′ equidistanti da D′, e presi sull'arco ACA′ vi corrispondano archi uguali B′C′, B′*c*′; e che gli angoli B′C′A, B′*c*′A sieno supplementi l'uno dell'altro; sicchè essendo dati l'angolo in A, ed i lati B′C′ [*a*], e B′A [*c*], la formola che dà l'angolo opposto al lato *c* ci lascerà nel dubbio se siasi ottenuto l'angolo in C′, o il suo supplemento in *c*′. Ciò non avverrà però se l'arco B′C′ si faccia uguale a B′A′, cioè quanto il supplemento di AB′: imperocchè in tal caso non vi esiterà, che il solo triangolo B′AC′ che possa costruirsi con que' dati, e quindi il problema sarà suscettivo di una sola soluzione. Nè tampoco vi sarà caso dubbio se B′C′ divenghi maggiore di B′A′; poichè in questo caso l'arco B′E′ uguale a B′C′, cadendo col suo estremo E′ al di là del punto A′, non si potrà costruire più co' dati del problema che il

solo triangolo sferico B′AC′. Vale a dire che non vi sarà caso dubbio se C′B′+B′A′, cioè $a+c$ sia uguale, o maggiore di AB′A′, o sia di 180°.

179. In secondo luogo suppongasi che l'angolo sferico in A sia ottuso, cioè maggiore di 90°. Si prolunghino similmente i lati AB, AC finchè s'incontrino in A′, e supposto che AB sia minore di un quadrante, dal punto B si abbassi sull'altro lato AC l'arco perpendicolare BD, che cadrà dalla parte dell'angolo conseguente del dato CAB. Ciò posto se si prendano a destra e sinistra del punto D, e nella circonferenza ACD, de' punti c, C equidistanti da D è egli chiaro, che gli archi di cerchio massimo che passano per quelli punti presi, e per B sieno uguali. Ma allorchè gli archi uguali DAC, DA′c sono tali che DA′c è maggiore di DA′, il punto C e l'altro c vengono a cadere nella stessa circonferenza ACA′, e gli archi BC, Bc vengono perciò a sottendere lo stesso angolo BAC dato. Laonde è chiaro, che in tal caso cogli stessi dati, cioè l'angolo BAC, lato c adjacente; e lato opposto a si potranno costituire due triangoli sferici diversi ABC, ABc, ne' quali l'angolo ignoto ACB dell'uno, ch'è opposto al lato c, è il supplemento dell'angolo ignoto AcB dell'altro, ch'è opposto al lato stesso. Or perchè in tal caso l'arco Bc è più distante dall'arco perpendicolare BD, che l'altro BA′; perciò quello sarà maggiore di questo, e quindi AB+Bc, o AB+BC sarà maggiore di ABA′, cioè di 180°: che perciò si vede, che un triangolo sferico, ove un angolo dato sia maggiore di 90°, il lato adjacente anche dato sia minore di 90°, e la somma di esso e del lato opposto ch'è pur dato, sia maggiore di 180°, ha due soluzioni: e non sarebbe suscettivo che di una sola soluzione, se

fig. 36.

la somma di tali lati fosse meno di 180°, o pur 180°.

fig. 37. Che se l'arco AB′ si fosse supposto maggiore di 90°: abbassando similmente dal punto B′ sulla circonferenza AC′A′ l'arco perpendicolare B′D′, e prendendo a destra e sinistra del punto D′, nella circonferenza stessa, gli archi uguali D′A′c′, D′AC′; allora si verrebbero a costituire due triangoli sferici cogli stessi dati, quando i due punti C′, c′ cadrebbero nella stessa semicirconferenza AC′A′. Or in un tal caso ciascun degli archi B′C′, B′c′, come più distante dell'altro B′A dall'arco perpendicolare B′D′, dovrà esser maggiore di B′A; vale a dire co' dati stessi A, c, a il problema avrà due soluzioni se $c < a$, e ne avrebbe una sola; se $c > a$, o $c = a$.

180. E sarà facile il vedere che in ciascuno de' due casi esaminati, cioè di $A < 90°$, e di $A > 90°$, se l'arco AB sia di 90° il problema avrà sempre due soluzioni eccetto il caso che l'arco a sia dello stesso numero di gradi e minuti che l'angolo opposto A, nel qual caso il triangolo proposto è un solo, ed è birettangolo, nè ha bisogno di risoluzione, essendovi tutto già noto.

181. Finalmente se l'angolo A suppongasi di 90°, è chiaro, che il problema non possa avere co' dati A, c, a, che una sola soluzione, qualunque si supponga essere il valore particolare di c, e qualunque il suo rapporto con a; il che coincide con ciò che si disse al n.° 3. Cas. II., ed al n.° 1. Cas. III. * 170. della Prop. IV*.

182. Dietro queste considerazioni si potrebbe stabilire una tavola per conoscere quando co'dati A, a, c, la specie del triangolo sferico sia dubbia, e quando non lo sia: e da una tal tavola se ne potrebbe poi ri-

levare, per mezzo del triangolo supplementale, un'altra, per conoscere quando co' dati a, A, C la specie del triangolo è dubbia, e quando non lo è. Un tal espediente è stato di fatti proposto, per conoscere i casi effettivamente dubbj, da alcuni analisti Francesi seguendo il Bertrand, che il primo lo adottò (*Développement nouveau de la partie élémentaire de Mathématiques tom. 2. sect. V.*); ma sarà meglio di quì recare a quest'oggetto le seguenti regole, le quali rendono tal teorica assai più determinata, più breve e comoda per la memoria.

183. *I. L'angolo opposto al lato minore è acuto, se la somma de' lati dati è minore* 180°.

E al contrario: *il lato opposto all' angolo minore è acuto, se la somma degli angoli dati è minore di* 180°.

Il che si rileva chiaramente dalla Propos. XIV. Lib. III.

184. *II. L'angolo opposto al lato maggiore è ottuso, se la somma de' lati dati sia maggiore di* 180°. Ed al contrario.

E ciò è una conseguenza manifesta della stessa proposizione.

185. *III. Quando la somma de' lati dati è uguale a* 180°, *anche la somma degli angoli opposti è uguale a* 180°. E al contrario.

Il che ecco in qual modo si dimostra

Poichè $\cos.B \operatorname{sen}.a = \frac{\cos.b - \cos.a \cos.c}{\operatorname{sen}.c}$ *, sostituendo in * 151. quest'equazione il valore di $\cos.a$ preso dal numero 151, e poi riducendo, col porre $1 - \operatorname{sen}.^2 c$ per * 36. $\cos.^2 c$ *, si avrà

$$\cos.B \operatorname{sen}.a = \cos.b \operatorname{sen}.c - \cos.A \operatorname{sen}.b \cos.c$$

e per simmetria dovrà parimente essere

$$\cos.C \operatorname{sen}.a = \cos.c \operatorname{sen}.b - \cos.A \operatorname{sen}.c \cos.b$$

che perciò sommando queste due equazioni, e poi riducendo il risultamento, col sostituire sen.$(b+c)$ in luogo di sen.b cos.c+cos.b sen.c *, sarà

* 45.

M . . sen.a (cos.B+cos.C) = (1—cos.A) sen.$(b+c)$

Ma è poi $\operatorname{sen}.B = \frac{\operatorname{sen}.A \operatorname{sen}.b}{\operatorname{sen}.a}$ *

* 150.

$$\operatorname{sen}.C = \frac{\operatorname{sen}.A \operatorname{sen}.c}{\operatorname{sen}.a}$$

e quindi sen.a (sen.B+sen.C) = sen.A (sen.b+sen.c)

Laonde dividendo quest'equazione per l'altra M, si avrà

$$\frac{\operatorname{sen}.B+\operatorname{sen}.C}{\cos.B+\cos.C} = \frac{\operatorname{sen}.A}{1-\cos.A} \times \frac{\operatorname{sen}.b+\operatorname{sen}.c}{\operatorname{sen}.(b+c)}$$

nella quale, se si sostituisca al primo membro

* 63. IX. $\operatorname{tang}.\frac{B+C}{2}$ *, e pongasi in luogo del secondo membro

* 59, e 66. XIII. $\cot.\frac{A}{2} \times \frac{\cos.\frac{1}{2}(b-c)}{\cos.\frac{1}{2}(b+c)}$ *, essa si ridurrà all'altra

$$\operatorname{tang}.\frac{B+C}{2} = \cot.\frac{A}{2} \times \frac{\cos.\frac{1}{2}(b-c)}{\cos.\frac{1}{2}(b+c)}$$

Or siccome in quest'ultima equazione $\cot.\frac{A}{2}$, e $\cos.\frac{b-c}{2}$ debbono essere sempre del segno stesso; si vede perciò chiaramente, che debbano anche risultar del segno stesso $\operatorname{tang}.\frac{B+C}{2}$, e $\cos.\frac{b+c}{2}$ cioè, che: *la metà della somma di due angoli di un trian-*

golo sferico, e la semisomma de' lati ad essi opposti sono della medesima specie. Dal che chiaramente risulta la terza regola quassù enunciata.

186. Dopo tutte queste ricerche, se la specie del triangolo resterà dubbia per una delle sue parti, cioè che dati A, *a*, *c* non si conosca la specie di C, o dati *a*, A, C non si sappia la specie di *c*, resterà anche dubbia la specie delle rimanenti parti del triangolo, come si rileva facilmente.

CAP. VI.

Regole Neperiane, e loro uso vantaggioso nella risoluzione de' triangoli sferici.

187. Nel principio del XVI.° secolo faustissimo per le matematiche, il barone Scozzese Giovanni Nepero, il cui nome sarà immortale, finchè si coltiveranno le scienze esatte, per la sublime ed utilissima invenzione de' logaritmi, stabilì anche alcuni nuovi metodi di risoluzione immaginati da lui, per render più semplice la pratica della Trigonometria sferica (*). Nè le nuove richerche analitiche fatte posteriormente da sommi Geometri moderni, nè l' eleganza, e la facilità che presentano per la risoluzione de' triangoli sferici le formole Euleriane da noi rapportate, ed applicate a quest' oggetto nelle Propp. IV. e V. del presente Libro, possono farci tralasciare di quì recar le Regole Neperiane. Questo sì che noi non le esporremo nella maniera tenuta dal loro inventore; ma le dedurremo da' principj stessi da noi stabiliti, ed in quel modo che ci è sembrato più convenevole. Che anzi è da avvertirsi, che le nostre enunciazioni della seconda e terza regola pajono differenti da quella del Nepero, per esservisi da noi introdotto il doppio del logaritmo del raggio, come convenivasi fare, mentre nelle Tavole logaritmiche che oggigiorno si hanno per le mani de' calcolatori, il logaritmo del raggio ponsi uguale a

(*) Veggasi anche a questo proposito quanto è stato detto nel Discorso Preliminare.

10,0000000, e non già a zero, come il suppose il Nepero, prendendo effettivamente l'unità per raggio; dal che nasceva che quel logaritmo non doveva comparire nel calcolo.

188. Ed al proposito della traduzione delle formole trigonometriche delle quali finora si è trattato nelle due Trigonometrie, da algebriche in logaritmiche, convien avvertire, che v'è bisogno in far questo passaggio della prudenza del calcolatore. Imperocchè siccome nel determinarle si è sempre supposto il raggio = 1, sicchè questo fattore, che in molte di esse implicitamente si contiene, con si ravvisa di fatto; e che, come si è già detto, il logaritmo del raggio nelle ordinarie Tavole de' seni, non più, alla maniera di Nepero, vien posto = 0, ma sì bene a 10,0000000, così convenendo tenerne conto, bisognerà prima apparecchiarsi la formola algebrica sulla quale si deve operare per la risoluzione di un dato caso; e la regola già nota a coloro che sono appena iniziati ne' principj di Geometria analitica si è, d'introdurre in tal formola tante volte per moltiplicatore o divisore il raggio, quante volte bisogna, perchè vi sia l'omogeneità di dimensioni ne' termini di essa. Così, per esempio, a fin di usare della formola del §. 151. in logaritmi, bisognerebbe porla sotto quest'altra forma, cioè

$$\cos.a\ R^2 = \cos.b.\cos.c.R + \text{sen}.b\ \text{sen}.c\ \cos.A$$

rendendo ciascun termine di tre dimensioni, come lo era l'ultimo. Senza questa precauzione il risultamento del calcolo logaritmico applicato ad una tal formola sarebbe erroneo, e condurrebbe a conseguenze fallacissime e paradosse. E taluno si potrebbe facilmente assicurare, che sia questa la vera forma di quell'espressione, e così di ogni altra, se ripigli il ragio-

namento che si è fatto nella Prop. II. Lib. IV., per rinvenirla, supponendo il raggio espresso da R, e non da 1.

189. Avvertite queste cose, per l'esatta applicazione del calcolo logaritmo al maneggio delle formole rinvenute per la risoluzione de' triangoli sferici, è anche necessario, prima di venire ad esporre la prima delle Regole Neperiane, il definire alcune voci delle quali il Nepero si è servito.

190. *Def.* 11. Chiamansi *parti circolari* in un triangolo sferico rettangolo i lati che comprendono l'angolo retto, ed i complementi dell'ipotenusa e di ciascuno degli angoli adjacenti ad essa.

Così nel triangolo sferico BAC rettangolo in A si dicono *parti circolari* i lati CA, AB [*b*, *c*], ed i complementi di CB [*a*], di B, e di C.

191. *Scol.* Distinguonsi queste parti circolari, secondo il Nepero, in tre specie, e chiamando *media* una di esse ad arbitrio, si chiameranno *estreme adjacenti* quelle altre due, che sono adjacenti alla media prefissa; ed *estreme opposte* quelle al contrario, che gli sono opposte
fig. 31. Così prendendo per parte media *comp.*B; le estreme adjacenti saranno il lato AB [*c*] e *comp.*BC (comp. *a*); e le estreme opposte *comp.* C, ed AC [*b*]. Ed al contrario prendendo per parte media *comp.* C, le estreme adjacenti sarebbero AC [*b*], e *comp.*CB (comp.*a*); e le estreme opposte, *comp.*B, ed AB [*c*]. In 2.° luogo prendendo per parte media *comp.* BC (compl.*a*), le parti estreme adjacenti saranno *comp.*B, e *comp.*C; ed AB, AC [*c*, *b*] le estreme opposte. In 3.° luogo presa per parte media il lato AB [*c*], le estreme adjacenti saranno *comp.*B, ed AC [*b*], (poichè l'angolo retto in A non intercetta adjacenza, non essendo parte circolare); e le estreme opposte sono *comp.*C,

e *comp.* BC (comp. *a*). E così pure presa per parte media il lato AC [*b*], le estreme adjacenti saranno *comp.* C, ed AB [*c*]; e le estreme opposte *comp.*B, e *comp.* BC [comp. *a*].

192. Intanto prima di passare ad esporre le Regole Neperiane delle quali si è detto avvertiremo, che esse da noi si sono ridotte a cinque; delle quali la prima, ch' è distinta in due parti, comprende i sei Teoremi dimostrati dal numero 159 al 164. compendiati, e connessi insieme; il che veramente non rende più semplice la risoluzione de' triangoli sferici rettangoli alla quale sono destinati i suddetti teoremi; ma bensì più facili a ritenevoli i principj su i quali essa è fondata: e le rimanenti quattro espongono in formole logaritmiche i principj per la risoluzione de' triangoli sferici obbliquangoli; e ciò gli rende assai più eleganti e facili a maneggiarsi nella pratica risoluzione di questi triangoli.

REGOLA I.

193. *In un triangolo sferico rettangolo il seno di ciascuna parte media è uguale*: 1.° *al prodotto delle tangenti delle parti adjacenti*: 2.° o *al prodotto de'coni delle parti estreme opposte.*

La verità di questa regola si rileverà facilmente coll' assegnare in effetto le quantità indicate in essa, e col vederne l' identicità co'principj dimostrati. In fatti secondo si è enunciato, preso *comp.*B per parte media, dovrebbe essere, per la prima parte della presente regola, $\cos.B = \text{tang.}c \times \cot.a = \frac{\text{tang.}c}{\text{tang.}a}$, come si è rilevato nel numero 163.: e per la seconda parte verrebbe

ad esser cos.B = sen.C × cos.*b*, il che combina col numero 161. E sarà anche facile, prendendo per parte media *comp.* BC, o pure un de' lati AB, AC, il ridurre le due formole della presente regola a quelle esibite negli altri numeri 127, 128, 130, e 132; sicchè da ciò non solamente resterà stabilita una tal regola, ma si rileverà anche, ch' essa in se comprenda le formole tutte in que' numeri rapportate.

LEMMA.

194. *È positivo il coseno della metà di due angoli di un' triangolo sferico meno il terzo: ed è negativo l' altro della metà de' tre angoli presi insieme.*

Parte I. Sieno A, B, C gli angoli di un triangolo sferico, i lati del suo triangolo supplementale sa-
* 133. ranno 180°—A, 180°—B, 180—C *; ed uno qualsivoglia di essi 180°—A sarà minore di 360—B—C, ch' è
* 130. la somma degli altri due *, cioè B+C—A < 180° e quindi $\frac{B+C-A}{2} < 90°$; che perciò il segno del co-
* 20. seno di quest' arco sarà positivo*.

Parte II. Poichè $\frac{A+B+C}{2}$ denota sempre un numero di gradi maggiore di 90°, e minore di 270°; è chiaro perciò, che il suo coseno debba esser ne-
* 20. gativo *.

REGOLA II.

195. *In un triangolo sferico, preso per base un lato qualunque, una volta si aggiunga alla semibase la semidifferenza de' lati, ed un' altra volta se ne sottragga; indi a' logaritmi de' seni di quella somma, e di questa differenza si aggiunga il doppio logaritmo del raggio, e tolgansene i logaritmi de' seni di ciascuno de' due lati. Finalmente si divida per metà il residuo ottenuto, e si avrà il logaritmo della metà dell' angolo verticale del triangolo sferico proposto.*

Denoti A un tal angolo, b, c, sieno i lati che lo comprendono, ed a la base del triangolo sferico proposto; dovrà essere

$$2.\log.\text{sen.}\frac{A}{2} = \log.\text{sen.}\frac{a+b-c}{2} + \log.\text{sen.}\frac{a+c-b}{2} + 2.\log.R - \log.\text{sen.}b - \log.\text{sen.}c$$

Imperocchè nell' equazione

$$2.\text{sen.}^2\frac{A}{2} = 1 - \cos.A \quad * \ 58.$$

si ponga per cos.A il suo valore $\frac{\cos.a - \cos.b\cos.c}{\text{sen.}b\,\text{sen.}c}$ * e * 151.

poi si riduca, ne risulterà,

$$2.\text{sen.}^2\frac{A}{2} = \frac{\cos.b\cos.c + \text{sen.}b\,\text{sen.}c - \cos.a}{\text{sen.}b\,\text{sen.}c} = \frac{\cos.(b-c) - \cos.a}{\text{sen.}b.\text{sen.}c} \quad * \ 48.$$

$$= \frac{2.\text{sen.}\frac{a+b-c}{2}\ \text{sen.}\frac{a+c-b}{2}}{\text{sen.}b\,\text{sen.}c} \quad * \ 62.\text{VIII.}$$

e dividendo per 2, ed introducendo nel secondo

membro per fattore il quadrato del raggio, che vi era taciuto, perchè uguale ad 1, il che convien fare per render una tale equazione di pari dimensioni ne' due membri *, sarà

* 188.

$$\text{sen.}^2 \frac{A}{2} = \frac{\text{sen.} \frac{a+b-c}{2} \text{ sen.} \frac{a+c-b}{2} R^2}{\text{sen.} b \text{ sen.} c}$$

Finalmente passando da' numeri a' logaritmi si avrà

$$2.\,log.\,\text{sen.}\frac{A}{2} = log.\text{sen.}\frac{a+b-c}{2} + log.\text{sen.}\frac{a+c-b}{2} + 2.log.\,R - log.\text{sen.}b - log.\text{sen.}c$$

come nella presente regola si era enunciato.

196. *Scol.* 1. Per mezzo di questa regola resta in pratica determinato agevolmente un qualunque angolo di un triangolo sferico da' tre lati di questo. Ed è chiaro, che nessun dubbio possa insorgere sulla specie di tal angolo, quantunque la sua metà sia esibita dal seno; poichè questa deve necessariamente esser minore di 90°.

197. *Scol.* 11. Il Nepero nel Libro secondo della sua opera intitolata: *Logarithmorum canonis descriptio. Lugd.* 1620, enuncia questa regola nel seguente modo: *Trianguli sphoerici latus quodvis (praecipue quadranti proximus) pro basi statuas. Inde semidifferentiam crurum et ad semibasim addas, et a semibasi subtrahas; producti et residui logarithmos addas, hinc auferas aggregatum ex logarithmis crurum, reliqui bipartiti logarithmi arcum duplices, et proveniet angulus verticalis, atque ita coeteri*, tacendovi il doppio logaritmo del raggio, del quale noi abbiamo tenuto conto, per la ragione detta di sopra *. Ed egli illustra una tal regola col seguente esempio, che noi dopo aver risoluto alla sua maniera, maneggeremo colle

* 187.

ordinarie tavole logaritmiche, e secondo la regola da noi data, per far vedere la corrispondenza de' risultamenti.

Nel triangolo CAB sien dati i tre lati, cioè *fig.* 33. $a=69°$, che il Nepero prende per base, $b=47°$, $c=34°$, e si cerchi l'angolo A.

Prendasi la semidifferenza de'lati, ch'è $\frac{1}{2}(b-c)=6°.30'$, e questa si aggiunga, e si tolga separatamente dalla semibase, ch'è $\frac{a}{2}=34°.30'$, ne risulterà la somma $41°$, e la differenza $28°$. Ciò posto a

	*log.*sen.41°=	4215044, secondo Nepero
si aggiunga	*log.*sen.28°=	7561472
risulterà		11776516
Poi	*log.*sen.34°=	5812606
si sommi con	*log.*sen.47°=	3128580
e la somma		8941186
si sottragga dalla somma poco fa ottenuta, si avrà il residuo		2835330
la cui metà		1417665

sarà il logaritmo del seno della metà dell' angolo verticale A, il quale risulterà perciò, come determina il Nepero, di 60°. 12'.24'' : laonde l'intero angolo A sarà di 120°. 24'. 49''.

Or maneggiando lo stesso triangolo secondo la nostra regola, e colle ordinarie Tavole, si ha

*log.*sen.41° =	9. 8169429
*log.*sen.28° =	9. 6716093
2 *log.*R =	20. 0000000
Somma di tutto	39. 4885522

Inoltre $log.sen.34° = 9.7475617$
$log.sen.47° = 9.8641275$

Somma di essi $= 19.6116892$
Differenza di questa somma dalla poc' anzi trovata 19.8768630
Metà di essa . . . $9.9384315 = log.sen.60°.12'.24'' \frac{1}{2}$, come dal calcolo di Nepero era già risultato.

REGOLA III.

198. *Al logaritmo del coseno della metà della somma de' tre angoli di un triangolo sferico si aggiunga quello del coseno della metà di due di essi meno il terzo, non meno che il doppio del logaritmo del raggio, e poi se ne tolgano i logaritmi de'seni di que' due stessi angoli; si otterrà il doppio logaritmo del seno della metà del lato che sottende un tal terzo angolo.*

Nell' equazione

* 58. $$2.sen.^2\frac{a}{2} = 1 - cos.a$$ *,

* 155. si ponga $\frac{cos.A + cos.B cos.C.}{sen.B.sen.C.}$ in vece di $cos.a$ *; sarà

$$2.sen.^2\frac{a}{2} = -\frac{cos.B cos.C - sen.B sen.C + cos.A}{sen.B sen.C}$$

* 48. $$= -\frac{cos.(B+C) + cos.A}{sen.B.sen.C.}$$ *

* 62. VII. $$= -\frac{2.cos.\frac{1}{2}(A+B+C) cos.\frac{1}{2}(B+C-A)}{sen.B\ sen.C}$$ *

e dividendo per 2, cambiando da $-$ in $+$ il segno di

$-\cos.\frac{A+B+C}{2}$ *; e finalmente introducendo nel secondo membro il fattore R^2, per renderlo di pari dimensioni al primo, sarà * 194.

$$\text{sen.}^2\frac{a}{2} = \frac{\cos.^1/_2(A+B+C)\cos.^1/_2(B+C-A)}{\text{sen.B.sen.C}}R^2$$

Finalmente passando da' numeri a' logaritmi, si avrà

$$2.log.\text{sen.}\frac{a}{2} = log.\cos.\frac{A+B+C}{2} + log.\cos.\frac{B+C-A}{2}$$
$$+2log.R - log.\text{sen.B} - log.\text{sen.C}$$

la quale equazione consente con quello che nella presente regola si è enunciato.

199. *Scol.* E per mezzo di questa terza regola è chiaro, che si saprà il seno della metà di un lato di un triangolo sferico dati tre suoi angoli; nè potrà esservi dubbio sulla specie di questa metà, dovendo essa esser sempre minore di 90°.

REGOLA IV.

200. *Al logaritmo della cotangente della metà di un angolo di un triangolo sferico si aggiunga il logaritmo del coseno della semidifferenza de' lati, che gli sono adjacenti, e se ne tolga quello del coseno della semisomma di questi; si avrà il logaritmo della tangente della semisomma de' rimanenti angoli.*

E si sarebbe avuto il logaritmo della semidifferenza di questi angoli stessi, se a' logaritmi de' coseni di quelle quantità si fossero sostituiti i logaritmi de' seni di esse.

Sia, come nella Reg. II., A quel primo angolo,

e b, c i lati, che lo comprendono, e quindi B, C i rimanenti angoli.

E poichè nel n.° 185 si è rilevato essere

$$\text{tang.}\frac{B+C}{2} = \text{cot.}\frac{A}{2} \times \frac{\text{cos.}^1/_2\,(b-c)}{\text{cos.}^1/_2\,(b+c)}$$

e che collo stesso ragionamento ivi fatto si ottiene

$$\text{sen.}a\,(\text{sen.}B - \text{sen.}C) = \text{sen.}A\,(\text{sen.}b - \text{sen.}c)$$

donde poi si ricava, collo stesso passaggio indicato in quel numero, l' equazione

$$\frac{\text{sen.}B - \text{sen.}C}{\text{cos.}B + \text{cos.}C} = \frac{\text{sen.}\,A}{1 - \text{cos.}A} \times \frac{\text{sen.}b - \text{sen.}c}{\text{sen.}(b+c)}$$

nella quale il primo membro è quanto $\frac{B-C}{2}$ e'l secondo pareggia $\text{cot.}\frac{A}{2} \times \frac{\text{sen.}^1/_2\,(b-c)}{\text{sen.}^1/_2\,(b+c)}$; perciò sarà anche

$$\text{tang.}\frac{B-C}{2} = \text{cot.}\frac{A}{2} \times \frac{\text{sen.}^1/_2\,(b-c)}{\text{sen.}^1/_2\,(b+c)}$$

E passando in ciascuna di queste due equazioni da' numeri a' logaritmi, sarà

$$log.\text{tang.}\frac{B+C}{2} = log.\,\text{cot.}\frac{A}{2} + log.\text{cos.}\frac{b-c}{2} - log.\text{cos.}\frac{b+c}{2}$$

$$log.\text{tang.}\frac{B-C}{2} = log.\text{cot.}\frac{A}{2} + log.\text{sen.}\frac{b-c}{2} - log.\text{sen.}\frac{b+c}{2}$$

Le quali equazioni sono quelle della presente regola.

201. *Scol.* Con queste due equazioni, ritrovando semplicemente cinque logaritmi, è chiaro, che si abbia la tangente della semisomma, e della semidifferenza di due angoli di un triangolo sferico, e quindi tali angoli, quando sia dato il terzo angolo, ed i la-

ti che lo comprendono. E per mezzo di ciascuna di esse si potrebbe anche avere un angolo, dati i lati che lo comprendono, e la somma, o la differenza degli altri due angoli; poichè è manifesto, che in tal caso resta determinato *log*.cot.$^1/_2$ A

REGOLA V.

202. *Al logaritmo della tangente della metà di un lato di un triangolo sferico, si aggiunga il logaritmo del coseno della semidifferenza degli angoli ad esso adjacenti, e poi se ne tolga quello del coseno della semisomma di questi; si otterrà il logaritmo della tangente della semisomma degli altri due lati.*

E si avrà il logaritmo della tangente della semidifferenza di tali due lati, se a' logaritmi de' coseni di quelle quantità, si sostituiscano i logaritmi de' seni di esse.

Dinotinsi con A′, B′, C′ gli angoli del triangolo supplementale del proposto, e per a', b', c' i lati opposti ad essi: si rileverà, come nella dimostrazione della Regola precedente, che abbiano luogo tra le parti di questo triangolo le seguenti due equazioni

$$\text{tang.}\frac{B'+C'}{2} = \text{cot.}\frac{A'}{2} \times \frac{\cos.^1/_2(b'-c')}{\cos.^1/_2(b'+c')}$$

$$\text{tang.}\frac{B'-C'}{2} = \text{cot.}\frac{A'}{2} \times \frac{\text{sen.}^1/_2(b'-c')}{\text{sen.}^1/_2(b'+c')}$$

le quali colla sostituzione di $180^\circ - b$, $180^\circ - c$, $180^\circ - a$, $180^\circ - B$, $180^\circ - C$ in luogo di B′, C′ A′, b', c', si riducono alle altre due

$$\text{tang.}\frac{b+c}{2} = \text{tang.}\frac{a}{2} \times \frac{\cos.^1/_2(B-C)}{\cos.^1/_2(B+C)}$$

$$\text{tang.}\frac{b-c}{2}=\text{tang.}\frac{a}{2}\times\frac{\text{sen.}^1/_2(B-C)}{\text{sen.}^1/_2(B+C)}$$

E passando in ciascuna di queste due ultime equazioni da' numeri a' logaritmi, si avrà

$$log.\text{tang.}\frac{b+c}{2}=log.\text{tang.}\frac{a}{2}+log.\text{cos.}\frac{B-C}{2}$$
$$-log.\text{cos.}\frac{B+C}{2}$$

$$log.\text{tang.}\frac{b-c}{2}=log.\text{tang.}\frac{a}{2}+log.\text{sen.}\frac{B-C}{2}$$
$$-log.\text{sen.}\frac{B+C}{2}$$

ch' è quanto nella presente regola si è enunciato.

203. *Scol.* Laonde, per mezzo di questa regola, si potranno rinvenire i logaritmi della metà della somma, e della metà della differenza de' due lati di un triangolo sferico, se pur sien dati il terzo lato, e gli angoli adjacenti ad esso; dond' è chiaro, che tali lati appariranno ad un tratto. Ed è anche manifesto, che ciascuna di queste due ultime equazioni offra un lato qualunque di un triangolo sferico, dall' esser dati gli angoli ad esso adjacenti, e la semisomma, o pur la semidifferenza degli altri due lati; poichè con questi dati si farà noto $log.\text{tang.}^1/_2\,a$, e quindi a

SCOLIO GENERALE

204. Dagli Scolj delle quattro ultime precedenti regole si rileva, che per mezzo di esse restano facilmente e completamente risoluti i Casi I., II., III., IV. della Prop. V. n.° 160: gli altri due V., VI., che com-

prendono i casi *dubbj*, per la prima loro parte non hanno bisogno di altra formola di risoluzione, oltre quella semplicissima che ne fu data al n.° 171 cas.V, e VI. Una volta però, che siasi nel n.° V. determinato l' angolo ignoto, ch'è opposto all'altro angolo dato, si potrà ottenere il terzo angolo, ed il terzo lato, per mezzo delle formole delle Regole IV., e V., nelle quali le ignote verranno ad essere tang.½ A, e tang.½ *a*

CAP. VII.

DELLA VALUTAZIONE DELLA PERPENDICOLARE, E DE' SEGMENTI DELLA BASE DE' TRIANGOLI SFERICI.

PROPOSIZIONE IX.

PROBLEMA.

205. *Dati i tre lati di un triangolo sferico*; *determinare la perpendicolare sopra ciascuno di essi abbassata dall' angolo opposto.*

fig. 38. Sieno a, b, c i lati del triangolo sferico, e si cerchi l' espressione della perpendicolare BD sul lato b, cioè BC.

Nella dimostrazione della seconda Regola Neperiana si è ritrovato essere

$$\text{sen.}\frac{B}{2}=\sqrt{\left[\frac{\text{sen.}^1/_2\,(b+a-c)\,\text{sen.}^1/_2\,(b+c-a)}{\text{sen.}a\,\text{sen.}c\,.}\right]}$$

e partendo dall' equazione $2.\text{cos.}^2\,{}^1/_2B=1+\text{cos.}B$; con gli stessi passaggi fatti per ritrovar la precedente formola si sarebbe veduto essere

$$\text{cos.}\frac{B}{2}=\sqrt{\left[\frac{\text{sen.}^1/_2\,(a+b+c)\,\text{sen.}^1/_2(a+c-b)}{\text{sen.}a\,\text{sen.}c}\right]}$$

* 46. Adunque sarà $2\text{sen.}^1/_2B\,\text{cos.}^1/_2B=\text{sen.}B$ * $=$

$$\sqrt{\left(\frac{\text{se.}^1/_2(a+b+c)\text{se.}^1/_2(a+b-c)\text{se.}^1/_2(a+c-b)\text{se.}^1/_2(b+c-a)}{\text{sen.}a\,\text{sen.}c}\right)}$$

Ma $\text{sen.}B=\frac{\text{sen.AD}}{\text{sen.}c}$. Adunque sarà $\text{sen.AD.}=$

$$2\sqrt{\left(\frac{\text{se.}^1/_2(a+b+c)\,\text{se.}^1/_2(a+b-c)\,\text{se.}^1/_2(a+c-b)\,\text{se.}^1/_2(b+c-a)}{\text{sen.}a}\right)}$$

espressione comodissima ad esser valutata per mezzo de' logaritmi.

SCOLIO.

206. Ponendo $a+b+c=2s$, si vedrà come nello Scol. al §. 89., che l' espressione precedente si riduce alla forma più semplice

$$\text{sen.AD} = 2\sqrt{\left(\frac{\text{sen.}s\ \text{sen.}(s-a)\ \text{sen.}(s-b)\ \text{sen.}(s-c)}{\text{sen.}a}\right)}$$

E poichè la perpendicolare dipende similmente da tutti i lati del triangolo, qualunque sia quello su cui si supponga che cada; sarà perciò facile il trasmutare la precedente espressione, nel caso che la perpendicolare cada sopra un qualunque altro de' due lati.

PROPOSIZIONE X.

PROBLEMA.

207. *Cogli stessi dati del Problema precedente, determinare i segmenti BD, DC prodotti dalla perpendicolare AD nel lato su cui essa cade.* fig. 38.

Soluz. Essendo ne' triangoli rettangoli sferici BAD, CAD

1 : cos.AD :: cos.BD : cos.BA* * 160.

ed 1 : cos.AD :: cos.CD : cos.CA

sarà cos.BD : cos.BA :: cos.CD : cos.CA* * 11. V.

dalla qual proporzione sarà facile a rilevarne l' altra

$$\text{ces.BD}-\text{cos.CD} : \text{cos.BD}+\text{cos.CD} :: \text{cos.BA}-\text{cos.CA} : \text{cos.BA}+\text{cos.CA}$$

e quindi

$$\frac{\text{cos.BD}-\text{cos.CD}}{\text{cos.BD}+\text{cos.CD}} = \frac{\text{cos.BA}-\text{cos.CA}}{\text{cos.BA}+\text{cos.CA}}$$

ossia (*).

$$\text{t.}\,{}^1/_2(\text{BD}-\text{CD})\ \text{t.}\,{}^1/_2\text{BC} = \text{t.}\,{}^1/_2(\text{BA}+\text{AC})\ \text{t.}\,{}^1/_2(\text{BA}-\text{AC})$$

e perciò

$$\text{t.}\,{}^1/_2(\text{BD}-\text{CD}) = \text{t.}\,{}^1/_2(\text{BA}+\text{AC})\ \text{t.}\,{}^1/_2(\text{BA}-\text{AC})\ \text{cot.}\,{}^1/_2\,\text{BC}$$

cioè: *la tang. della semidifferenza de' segmenti prodotti sul lato a* sarà espressa da

$$\text{tang.}\,{}^1/_2(c+b)\ \text{tang.}\,{}^1/_2(c-b)\ \text{cot.}\,{}^1/_2\,a$$

Ed avendosi per tal modo la differenza de'segmenti prodotti nel lato *a*, si verrà a conoscere ciascuno di essi. E similmente per ogni altro lato.

208. *Scol.* 1. L'analogia rinvenuta nella soluzione del presente Problema, cioè

$$\text{cos. BD} : \text{cos.BA} :: \text{cos. CD} : \text{cos.CA}$$

fa vedere che cos.BD sarà maggiore uguale o minore di cos.CD, secondochè sia cos.BA maggiore, uguale o minore di cos.CA; che perciò si vede, che l'arco BD sarà maggiore, uguale o minore dell'arco DC, secondochè l'arco BA lo sarà dell'altro CA. Vale a dire che: *Il maggior segmento sarà sempre adjacente al lato maggiore, il minore al minore.*

(*) Il seguente passaggio si ottiene riducendo le precedenti due frazioni per mezzo de' numeri VII., VIII. del §. 62.

209. *Scol.* 2. Allorchè la perpendicolare AD cade fuori del triangolo, l'espressione tang. $1/2$ (BD—CD) resta di sua natura cambiata nell'altra tang. $1/2$ (BD+CD) senza che vi sia bisogno di nuova calcolazione; ed in tal caso venendosi a determinare la somma de'segmenti della base, della quale n'è nota la differenza BC, si farà anche noto ciascun di essi DC, DB.

PROPOSIZIONE XI.

PROBLEMA.

210. *Dati i tre angoli di un triangolo sferico trovar la perpendicolare sopra uno de' lati*, per esempio, *quella sul lato BC* [*a*]. fig. 83.

Dalla dimostrazione della Reg. III. di Nepero, si ha

$$\text{sen.}\frac{b}{2}=\sqrt{\left[\frac{-\cos.\,1/2(A+B+C)\cos.\,1/2\,(A+C-B)}{\text{sen.}A\,\text{sen.}C}\right]}$$

ed inoltre rilevandosi dall'equazione $2\cos.^2\frac{b}{2}=1+\cos.b$*, che debba essere * 58

$$\cos.\frac{b}{2}=\sqrt{\left[\frac{\cos.\,1/2\,(A+B-C)\,\cos.\,1/2\,(B+C-A)}{\text{sen.}A\,\text{sen.}C.}\right]}$$

sarà, facendo gli stessi passaggi, che nel Problema antiprecedente, sen. AD =

$$2\sqrt{\left(\frac{-\text{co.}\,1/2(A+B+C)\text{co.}\,1/2(A+B-C)\text{co.}\,1/2(A+C-B)\text{co.}\,1/2(B+C-A)}{\text{sen. A.}}\right)}$$

E con una sostituzione analoga a quella dello Scol. del suddetto Problema, ponendo cioè $A+B+C=2S$, la precedente espressione di sen. AD si cambierà in quest'altra

$$\text{sen.AD} = \frac{2\sqrt{-\cos.S \cos.(S-C)\cos.(S-B)\cos.(S-A)}}{\text{sen. A}}$$

E sarà poi facile il congegnare, dopo questa espressione, quelle altre che rappresentano le perpendicolari sugli altri due lati del proposto triangolo sferico.

ALITER

fig. 39. 211. Sia EFG il triangolo supplementale del proposto ABC, e dall' angolo E ch' è supplemento del lato BC su cui cade la perpendicolare AD s' intenda tirata nel lato opposto FG, ch' è supplemento dell' angolo A, la perpendicolare EH, sarà

* 159. sen.AD = sen.AB sen.B* = sen.G. sen.EG = sen.EH. Laonde avendo lo stesso seno l' arco AD, e l' altro EH, dovranno esser l' uno supplemento dell' al-

* 11. tro*: che perciò essendo dati i tre angoli del triangolo sferico ABC, e quindi i lati del suo supplementale EFG; se si determini in questo la perpendicolare EH si avrà l' altra AD corrispondente nel triangolo dato ABC, col prendere l' arco supplementale dell'arco EH.

212. *Cor.* Dalla dimostrazione recata nel principio del precedente *Aliter* si rileva, che: *la perpendicolare in un triangolo sferico, è supplemento della perpendicolare nel triangolo supplementale di esso, abbassata nel lato opposto, da quell' angolo ch' è supplemento del lato su cui cadeva la perpendicolare nel primo triangolo.*

PROPOSIZIONE XII.

PROBLEMA.

213. *Dati i tre angoli del triangolo sferico ABC, fig. 38. determinare i segmenti BAD, CAD di un angolo A prodotti dalla perpendicolare abbassata da esso sul lato opposto; ed i segmenti BD, DC di questo lato.*

Soluz. Essendo $\cos.AD = \frac{\cos.B}{\text{sen.BAD}} = \frac{\cos.C}{\text{sen.CAD}}$, * 161

sarà $\frac{\cos.B}{\text{sen.BAD}} = \frac{\cos.C}{\text{sen.CAD}}$; e quindi .....

$$\cos.B : \cos.C :: \text{sen.BAD} : \text{sen.CAD}$$

dalla quale analogia si ha poi

$$\cos.B + \cos.C : \cos.B - \cos.C :: \text{sen.BAD} + \text{sen.CAD} : \text{sen.BAD} - \text{sen.CAD}$$

e

$$\frac{\cos.B - \cos.C}{\cos.B + \cos.C} = \frac{\text{sen.BAD} - \text{sen.CAD}}{\text{sen.BAD} + \text{sen.CAD}}$$

la quale equazione ridotta per mezzo de' numeri V, VI, VII, ed VIII del §. 62. darà

$$\text{t.}\tfrac{1}{2}(B+C)\ \text{t.}\tfrac{1}{2}(B-C) = \text{cot.}\tfrac{1}{2}(BAD+CAD)\ \text{t.}\tfrac{1}{2}(BAD-CAD)$$

e quindi

$$\text{t.}\tfrac{1}{2}(BAD-CAD) = \text{t.}\tfrac{1}{2}\,A.\text{t.}\tfrac{1}{2}(B+C)\ \text{t.}\tfrac{1}{2}(B-C)$$

che perciò risultando determinata la differenza de' segmenti dell' angolo verticale, lo saranno per conseguenza anche questi; ed allora ne' triangoli sferici rettangoli BAD, CAD sarà facile il determinare gli archi BD, DC.

214. *Scol.* 1. Dall' analogia ritrovata nel presente Problema, cioè

$$\cos.B : \cos.C :: \text{sen.BAD} : \text{sen.CAD}$$

si rileva, che essendo cos.B> cos. C debba anche essere sen. BAD > sen. CAD. Or quando cos. B è maggiore di cos.C, l'angolo B risulta minore dell'altro C; e nel tempo stesso dovendo essere sen.BAD maggiore di sen. CAD, quell'angolo è maggiore di questo. Adunque si vede che: *Il segmento maggiore dell' angolo verticale di un triangolo sferico corrisponde verso quella parte ove sta l'angolo alla base minore; ed al contrario.*

215. *Scol.* Intorno alla soluzione di questo Problema bisogna fare la stessa avvertenza che fu fatta per quella dell'antiprecedente, al n°. 209.

CAP. VIII.

DELLA MISURA DELLA SUPERFICIE, E DEL PERIMETRO DI UN TRIANGOLO SFERICO.

PROPOSIZIONE XIII.

PROBLEMA.

216. *Dati i tre angoli di un triangolo sferico appartenente ad una sfera di un dato raggio; determinare la superficie di quel triangolo.*

Sia il triangolo sferico dato ABC. Si compia dall' uno de' suoi lati BC il circolo BCDE, e poi si prolunghino gli altri due lati BA, AC da una parte fino alla circonferenza di quel circolo in D, E, e dall' altra finchè s' incontrino in F. E poichè l' arco EAC è di 180°. del pari che l' altro ACF*, sarà perciò l' arco EA uguale all' altro CF; e similmente si dimostra l' arco DA uguale a BF. Ma è poi l' angolo sferico BFC uguale all' altro BAC*, e questo al suo verticale DAE*. Laonde i due triangoli sferici BFC, DAE saranno tra loro uguali *, e quindi la porzione di superficie sferica racchiusa tra i due semicerchi ABF, ACF, la qual dicesi ordinariamente *fuso sferico*, sarà uguale alla somma de' due triangoli sferici ABC, EAD. Or siccome il fuso ABFC è uguale al prodotto del diametro della sfera cioè di 2R nell' arco di cerchio massimo che misura l' inclinazione de' due cerchi ACF, ABF da' quali è terminato, ridotto nelle unità del rag- fig. 40. * 115. * 127. * 128. * 140.

gio (*); e che un tal arco è dello stesso numero di gradi e minuti che l' angolo sferico A del triangolo proposto; perciò sarà la somma de' due triangoli sferici BAC, EAD=A×2R. Similmente siccome la somma de' due triangoli sferici ACB, ADC compie il fuso BADC, perciò sarà BAC+ADC=B×2R; e così pure si vedrà esser BAC+EAB=C×2R, mentre questi due ultimi triangoli sferici formano il fuso CAEB. Laonde riunendo in una somma queste grandezze, ed in un' altra que' prodotti che gli sono rispettivamente uguali, sarà 3BAC+EAB+DAC+EAD=(A+B+C)×2R. Ma BAC+EAB+DAC+EAD forma, come si vede, la superficie dell' emisfero EBCDA, la quale adequa il prodotto 360°×R, o 180°×2R, supposto che il primo fattore 180°. si riduca all' unità del secondo. Adunque sarà

$$2BAC+180°\times 2R=(A+B+C)\times 2R$$

e quindi togliendone di comune 180°×2R, e prendendo le metà de' due residui, sarà

$$BAC=(A+B+C-180°\times)R.$$

Vale a dire, che: *la superficie di un triangolo sferico di una data sfera, è quanto l' eccesso della somma de' suoi tre angoli su* 180°. *ridotto in parti del raggio della sfera, e multiplicato per questo.*

---

fig. 24. (*) *N. B* Si può dimostrare come nella Prop. 4. del Lib. III. che il fuso ADBE stia all' altro AEBF, come DE ad EF, dal che rilevandosi poi facilmente, che l' intera superficie sferica stia ad un suo fuso ADBE, come la circonferenza HKC all' arco DE, o come il prodotto di quella circonferenza nel diametro al prodotto del diametro stesso nell' arco DE, se ne dedurrà; che siccome quel primo prodotto pareggia la superficie della sfera, così il secondo debba uguagliare il fuso ADBE.

217. *Scol.* Questa semplicissima esibizione della superficie di un triangolo sferico è dovuta al Wallis; ed essa ci mostra, che: *É la stessa la superficie di tutti i triangoli sferici di una sfera, ne' quali la somma degli angoli è la medesima. Ed essendo diverse queste somme, tali superficie sono proporzionali all' eccesso di esse somme sopra* 180°.

Il qual carattere di eguaglianza, e di rapporto de' triangoli sferici è incomunicabile co' triangoli rettilinei.

PROPOSIZIONE XIV.

PROBLEMA.

218. *Determinare l'aja di un triangolo sferico, dati i suoi tre lati.*

Soluz. Questo Problema si vede chiaramente che si potrebbe ridurre al precedente, quando da' tre lati dati si passasse a determinare i tre angoli del triangolo sferico. Siccome però non v' ha bisogno de' tre angoli, ma della loro somma per esibire l' aja di un triangolo sferico, così esso sarà più facilmente risoluto riducendolo al seguente:

Dati i tre lati di un triangolo sferico, trovare la somma de' suoi angoli.

Sien dati i tre lati *a*, *b*, *c* opposti rispettivamente agli angoli A, B, C, e chiamisi *s* la loro somma. E poichè cos. $\frac{1}{2}$ (A+B+C) . . . . . fig. 33.
= cos. $\frac{1}{2}$ (A+B) cos. $\frac{1}{2}$ C — sen. $\frac{1}{2}$ (A+B) sen. $\frac{1}{2}$ C. 48

$=(\cos.{}^1/_2 A \cos.{}^1/_2 B - \text{sen.}{}^1/_2 A \text{ sen.}{}^1/_2 B)\cos.{}^1/_2 C$

* 45. $-(\text{sen.}{}^1/_2 A \cos.{}^1/_2 B + \cos.{}^1/_2 A \text{ sen.}{}^1/_2 B)\text{sen.}{}^1/_2 C$;

sostituendo per $\text{sen.}{}^1/_2 A$, $\cos.{}^1/_2 A$, $\text{sen.}{}^1/_2 B$, $\cos.{}^1/_2 B$, $\text{sen.}{}^1/_2 C$, $\cos.{}^1/_2 C$ i loro rispettivi valori ne' lati del triangolo proposto (la forma de' quali, pe' seni fu rinvenuta nella dimostrazione della Regola II^a. Neperiana, e pe' coseni si ottiene col metodo stesso ivi tenuto applicato all' equazione $1 + \cos.A = 2.\cos.\frac{A}{2}$) e riducendo col sostituire s per la semisomma de' lati a, b, c, si avrà

$$\cos.\frac{A+B+C}{2} = \left[\sqrt{\frac{\text{sen. } s.\text{sen.}(s-a)}{\text{sen.}b \text{ sen.}c}}\sqrt{\frac{\text{sen.}s \text{ sen.}(s-b)}{\text{sen.}a \text{ sen.}c}} - \sqrt{\frac{\text{sen.}(s-b) \text{ sen.}(s-c)}{\text{sen.}b \text{ sen.}c}}\sqrt{\frac{\text{sen.}(s-a)\text{sen.}(s-c)}{\text{sen.}a \text{ sen.}c}}\right]\sqrt{\frac{\text{sen.}s \text{ sen.}(s-c)}{\text{sen.}a \text{ sen.}b}}$$

$$- \left[\sqrt{\frac{\text{sen.}(s-b) \text{ sen.}(s-b)}{\text{sen.}b \text{ sen.}c}}\sqrt{\frac{\text{sen.}s \text{ sen.}(s-b)}{\text{sen.}a \text{ sen.}c}} + \sqrt{\frac{\text{sen.}s \text{ sen.}(s-a)}{\text{sen } b \text{ sen } c}}\sqrt{\frac{\text{sen.}(s-a) \text{ sen.}(s-c)}{\text{sen.}a \text{ sen.}c}}\right]\sqrt{\frac{\text{sen.}(s-a) \text{ sen.}(s-b)}{\text{sen.}a \text{ sen.}b}}$$

$$= \sqrt{\frac{\text{sen.}s \text{ sen.}(s-a) \text{ sen.}(s-b) \text{ sen.}(s-c)}{\text{sen.}a \text{ sen.}b \text{ sen.}c}} \times \left[\text{sen. } s - \text{sen.}(s-c) - \text{sen.}(s-b) - \text{sen.}(s-a)\right].$$

* 62. VI. Ma $\text{sen. } s - \text{sen. } (s-c) = 2.\text{ sen.}{}^1/_2 c \cos.(s - {}^1/_2 c)$ * $= 2.\text{sen.}{}^1/_2 c \cos.{}^1/_2 (a+b)$; e $\text{sen. } (s-b) + \text{sen. } (s-a) =$

* 62. V. $2.\text{ sen. } (s - {}^1/_2 (a+b)) \cos.{}^1/_2 (a-b)$ * $= \ldots$

$2.\text{sen.}{}^1/_2 c \cos.{}^1/_2 (a-b)$. La onde sarà . . . . . .

$\text{sen. } s - \text{sen. } (s-c) - \text{sen. } (s-b) - \text{sen. } (s-a)$

$= -2.\text{sen.}{}^1/_2 c [\cos.{}^1/_2 (a-b) - \cos.{}^1/_2 (a+b)]$

* 48. $= -2.\text{ sen.}{}^1/_2 c \times 2.\text{ sen.}{}^1/_2 b \text{ sen.}{}^1/_2 a$ *; e quindi

$$\cos.\frac{A+B+C}{2} = \frac{4 \text{ sen.}{}^1/_2 a \text{ sen.}{}^1/_2 b \text{ sen.}{}^1/_2 c}{\text{sen.}a \text{ sen.}b \text{ sen. } c}\sqrt{\text{sen.}s \times \text{sen.}(s-a) \text{ sen. } (s-b) \text{ sen.}(s-c)}$$

* 46. Che perciò essendo $\text{sen.}a = 2\text{ sen.}{}^1/_2 a \cos.{}^1/_2 a$ *; e si-

milmente riducendo sen.b, sen.c, e poi facendo quest' ultima sostituzione nella formola precedente, si avrà

$$\cos.\frac{A+B+C}{2} = -\frac{\sqrt{\text{se.}s.\ \text{se.}(s-a)\ \text{se.}(s-b)\ \text{se.}(s-c)}}{2\cos.{}^1/_2 a\ \cos.{}^1/_2 b\ \cos.{}^1/_2 c}$$

la qual formola rinvenuta dal Cagnoli è assai più comoda pel calcolo dell' altra che ne diede il de Gua per la soluzione del presente Problema.

SCOLIO GENERALE.

219. Siccome in ogni altro caso di tre parti date nel triangolo sferico, sempre si viene ad avere due angoli ed un lato, o due lati e un angolo; così determinandosi nel primo caso il terzo angolo, e nel secondo il terzo lato, si risolverà il Problema della valutazione dell' aja, riducendolo ad uno de' due precedenti: che perciò ci asterremo dal qui recare per questi altri casi soluzioni dirette, tanto più che queste manoducono a formole incogrue pel calcolo logaritmico.

Il Signor Cagnoli nella sua dottissima Trigonometria raccomanda, per l' utilità di cui può essere nella descrizione de' Planisferi, che sia *ripetuta* e *divulgata* la regola del Signor de Gua per ridurre in settori circolari la superficie del triangolo sferico, la qual regola egli chiama *meccanica determinazione*, quantunque in realtà non sia che una geometrica costruzione della formola di sopra recata * per l' aja del triangolo sferico: ed una tal costruzione ottiensi nel seguente modo. * 216.

Si descriva col centro O, e col raggio della sfera della cui superficie è parte un triangolo sferico, il cerchio ACB; e nella sua circonferenza si prendano, da un punto A gli archi AC di 90°, ed ACB = $^1/_2$ (A+B+C), A, B, C dinotano gli angoli del triangolo sferico. fig. 41.

Finalmente si giungano le OC, OB, sarà il settore $COB = {}^{1}/_{2}(A+B+C-180^{o}) \times {}^{1}/_{2}R$, cioè la quarta parte del proposto triangolo sferico.

PROPOSIZIONE XV.

PROBLEMA.

220. *Dati i tre angoli di un triangolo sferico determinare il perimetro di esso.*

Soluz. Per risolvere il proposto Problema, che, come si vede, è l'inverso di quello al quale si era ridotto il precedente, si prenda la formola in quello trovata, dinotante il coseno della semisomma de' tre angoli ne' lati, ed essa si trasformi per mezzo del triangolo supplementale, si avrà la seguente altra

$$\text{sen.}\frac{a+b+c}{2} = \frac{\sqrt{-\text{co.S co.}(S-A)\ \text{co.}(S-B)\ \text{co.}(S-C)}}{2.\text{sen.}{}^{1}/_{2}A\ \text{sen.}{}^{1}/_{2}B\ \text{sen.}{}^{1}/_{2}C}$$

che soddisfa al presente Problema, e nella quale S rappresenta la semisomma degli angoli.

ELEMENTI

DI

TRIGONOMETRIA.

LIBRO V.

USO DELLE FORMOLE TRIGONOMETRICHE NELLA SOLUZIONE DI TALUNI PROBLEMI GEOMETRICI.

221. Allorchè tra i dati di un Problema geometrico contengonsi quantità angolari, o pur che queste derivinsi nello svolgimento delle conseguenze che si fa per pervenirsi da que' dati a fissar l'equazione al Problema, supposto che esso algebricamente si risolva, se mai la natura del Problema è tale che il quesito si richieggа in valore, e non già geometricamente; in tal caso la Trigonometria offre pronti mezzi per riuscire. Siccome però è vantaggioso il ricorrere alle formole Trigonometriche nel cennato caso, così è, per servirmi di una frase del Cartesio, un *peccato in Geometria*, contro del quale *meritamente griderebbe Euclide*, *e tutta la Scuola Euclidea*, se di esse si facesse uso, quando dell'equazione al Problema se ne volesse una Geometrica composizione; su di che sommi Geometri moder-

ni hanno posta sì poca avvertenza ch' è ormai passato in costume di frammischiare nelle geometriche soluzioni di que' Problemi, che mediante l'Algebra si maneggiano, ove occorrano triangoli dati di specie, formole comprendenti seni e coseni, o altre linee trigonometriche, come se nulla ripugnasse alla severa Geometria l' intrudere, nelle sue operazioni esatte, quantità approssimanti. Ciò non ostante si può anche in questi casi usar talvolta di esse con giudizio e con grandissimo vantaggio, senza derogare al rigore di un' esatta composizione geometrica del Problema, come nel seguente Libro faremo rilevare.

Le ragioni finora dette mi hanno determinato a trattare in questo Libro e nel seguente di *Applicazione della Trigonometria a ricerche geometriche*, stimando, che siccome da una parte non bisognava tralasciare di far conoscere l' uso vantaggioso che di essa può farsi nella risoluzione de' Problemi, dall' altra dovessero tali considerazioni a dirittura separarsi dall' ordinaria *Applicazione dell' Algebra alla Geometria*, ove le equazioni de' Problemi convien che sieno geometricamente costruite. Ed acciocchè meglio s' intenda quanto ho finora accennato circa la distinzione dell' esibizione del quesito di taluni Problemi in valore, o geometrica costruzione, que' Problemi che tratterò nel presente Libro in riguardo alla prima specie di quesito, verranno anche recati nell' Applicazione dell' Algebra alla Geometria, che formerà il secondo volume del *Corso di Analisi Algebrica* già altra volta da me promesso al Pubblico con un Manifesto, e del quale è già prossima la pubblicazione del 1°. volume. Soggiungerò inoltre, che il presente Libro forma come una continuazione de' due ultimi Capitoli del Libro II. e IV. del presente Trattato, avendo recati in quelli so-

lamente un certo numero di que' Problemi in cui i dati e il quesito alle immediate regole della risoluzione del triangolo gli rimettevano, sicchè si potesse per risolverli fare anche a meno di ricorrere a simboli, e a maneggio di equazioni.

PROPOSIZIONE I.

PROBLEMA.

222. *Esibire quel triangolo di cui sia data l' aja, il perimetro, ed uno degli angoli.*

Soluz. L' aja sia espressa da a^2, il perimetro da p, e l'angolo dato sia B; e suppongasi che per l'esibizione del quesito del proposto Problema si voglia in prima determinare il lato AC, che si chiami x, opposto a quell'angolo dato. Si abbassi da uno degli altri due angoli A la perpendicolare AD sul lato opposto BC. E poichè nel triangolo ABC è dato l'angolo in B, e l'aja, dovrà esser dato anche il rettangolo de' lati AB, BC, che verrà espresso da $\frac{2a^2}{\text{sen.B}}$. fig. 11.

Ed essendo $AB+BC=p-x$, sarà $AB^2+2AB\times BC+BC^2=p^2-2px+x^2=p^2-2px+AB^2+BC^2-2AB\times CB\cos.B$; e quindi $2AB\times BC\,(1+\cos.B)=p^2-2px$, cioè ponendo per $2AB\times BC$ il valore poc' anzi trovato, sarà . . . . . .

$$p^2-2px=4a^2\left(\frac{1+\cos.B}{\text{sen.B}}\right)=4a^2\cot.{}^1/_2\,B^2 \quad * 59.$$

$$x={}^1/_2p-\frac{2b^2}{p}\cot.{}^1/_2\,B$$

E gli altri due lati si determineranno per mezzo delle formole esibite nella Prop. XVIII. del Lib. II.

223. *Scol.* Nel risolvere il presente Problema si è preferito di determinar prima il lato AC opposto all' angolo dato, come aveva fatto il Cagnoli, nella sua Trigonometria; poichè per tal modo la soluzione riesce più facile, pervenendosi per la determinazione di tal lato ad una equazione di 1°. grado; mentre volendo esibire prima un de' lati adjacenti a quell' angolo, come ha fatto il Newton, l' equazione al Problema, per la determinazione di un di essi, sarebbe stata di 2°. grado, come intuitivamente si vede, dovendo tal equazione includere i valori dell' un lato e dell' altro, mentre questi stanno similmente a tutte le condizioni del Problema.

PROPOSIZIONE II.

PROBLEMA.

fig.24. 224. *Esibire un triangolo ABC, in cui i tre lati AB, AC, CB, e la perpendicolare CD sieno in geometrica proporzione.*

Soluz. È chiaro dall' enunciazione, che il triangolo non sia cercato che di sola specie, che perciò la presente ricerca si riduca a determinare gli angoli. Per ottenere ciò, si abbassi dal punto A sul lato opposto BC perpendicolare Ac, e da c sulla BA l' altra perpendicolare *cd*. Ed essendo

$$BA : Ac :: Bc :: cd$$

e

$$BA : AC :: BC :: CD$$

* 11.V. sarà

$$BA : Ac :: BA :: AC^*$$

che perciò l' angolo in C dovrà esser retto; cioè la Ac dovrà coincidere con la AC.

Ciò posto sta

AB : AC :: 1 : cos. A* * 72.

AC : CB :: 1 : tang A* * 74.

che perciò dovrà essere, per le condizioni del Problema,

$$1 ; \cos.A :: 1 : \text{tang. } A$$

e $$\cos.A = \text{tang.}A = \frac{\text{sen.}A}{\cos.A}$$

cioè $$\cos.^2 A = \text{sen.}A$$

o sia $$1 - \text{sen.}^2 A = \text{sen.}A$$

la quale equazione risoluta dà $\text{sen.}A = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5} = \cos.B$ (si tralascia il segno — del radicale, come conducente ad assurdo nella presente quistione) cioè sarà, trascurando i secondi, l'angolo A = 38° 10′, e l'altro B = 51° 50′.

225. *Scol.* La soluzione quì esibita del proposto Problema dà luogo alla seguente geometrica composizione del medesimo.

Sul diametro AB di un semicerchio ACB si elevi fig. 43. la perpendicolare BE uguale al raggio di tal cerchio, e congiunta la AE, se ne tagli la EF uguale al raggio stesso; e poi si applichi in quel semicerchio, dal punto B, la BC uguale alla AF, e giungasi la AC^2; sarà ACB il triangolo cercato.

Imperocchè essendo $AE^2 - EF^2 = AB$; sarà $AB^2 = (AE+EF)\,FA = (BA+AF)\,AF = (BA+BC)\,BC = BA\times BC + BC^2 = BA\times BC + AB^2 - AC^2$. Laonde sarà $BA\times BC = AC^2$; e perciò BA : AC :: AC : BC, ed anche come BC : CD*. * 8. VI.

PROPOSIZIONE III.

PROBLEMA.

Fig. 44. 226. *Nel quadrilatero ABDC, che ha gli angoli in B, C retti; dati i lati AB, AC, e l'angolo A compreso da essi, determinare gli altri due lati CD, DB, e le diagonali AD, BC.*

Soluz. Si prolunghino i lati AC, BD del quadrilatero finchè s'incontrino in E, e pongasi $AB = a$, $AC = b$. E poichè sta AE : AB :: 1 : cos.A, sarà $AE = \frac{a}{\cos.A}$ e quindi $CE = \frac{a}{\cos.A} - b$. E così pure, essendo BA : BE :: 1 : tang.A, sarà $BE = a \times \text{tang.}A$. Or pe'triangoli simili ABE, DCE sta EB: BA: EC : CD cioè $a \times \text{tang.}A : a :: \frac{a}{\cos.A} - b : CD$. Adunque sarà

$$CD = \frac{a}{\cos.A \text{ tang.}A} - \frac{b}{\text{tang.}A} = \frac{a}{\text{sen.}A} - \frac{b}{\text{tang.}A} = \frac{a - b\cos.A}{\text{sen.}A}.$$

E similmente, se si fossero prolungate le AB, CD sino ad incontrarsi, la BD dovrà risultare uguale a $\frac{b - a\cos.A}{\text{sen.}A}$.

Si sono dunque ottenuti i valori de'lati DB, DC. Ed è poi pel triangolo BAC, la diagonale $BC = \sqrt{(a^2 + b^2 - 2ab\cos.A)}$; e pel triangolo rettangolo ACD l'altra diagonale $AD = \sqrt{(AC^2 + CD^2)} = \sqrt{\left[b^2 + \left(\frac{a - b\cos.A}{\text{sen.}A}\right)^2\right]} = \sqrt{\left(\frac{a^2 + b^2 - 2ab\cos.A}{\text{sen.}A}\right)}$

Adunque si è interamente soddisfatto alle condizioni del proposto Problema.

PROPOSIZIONE IV.

PROBLEMA.

227. *Dato l'angolo solido O di un parallelepipedo qualunque, ed i tre lati OA, OP, OQ intorno ad esso; determinare quel solido.* fig. 45.

Soluz. Col centro O, e col raggio OA s'intenda descritta una superficie sferica, e sia ABC quel triangolo sferico di questa, che sottende l'angolo solido proposto, che or trovasi al centro di essa, e del quale saranno dati i lati a, b, c, come dell'istesso numero di gradi e minuti degli angoli che essi rispettivamente sottendono. S'intenda abbassata da A sul piano opposto POQ la perpedicolare AE, e per questa, e pel centro O s'intenda tirato un piano che segnerà in quel triangolo sferico l'arco AD perpendicolare all'altro CD, e si avrà

$$\text{sen.AD} = \frac{2\sqrt{\text{sen.}s.\text{sen.}(s-a)\text{sen.}(s-b)\,\text{sen}\,(s-c)}}{\text{sen.}a}$$ * 206.

e quindi, dinotando la OA con r, sarà AE = AO sen. AD, cioè

$$\text{AE} = \frac{2r\sqrt{\text{sen.}s.\,\text{sen.}(s-a)\,\text{sen.}(s-b)\,\text{sen}\,(s-c)}}{\text{sen.}\,a}$$

Or il parallelogrammo costituito co' lati PO, OQ, e coll'angolo dato da essi compreso, ponendo PO $=p$, ed OQ$=q$, ha per espressione del suo valore pq. sen.a. Adunque la solidità del proposto parallelepipedo sarà espressa da

$$2rpq\sqrt{\text{sen.}s.\,\text{sen.}(s-a)\,\text{sen.}(s-b)\,\text{sen.}(s-c)}$$

228. *Scol.* E da ciò risulta, che se nella piramide triangolare AOQP sieno dati i tre lati AO, OP, fig. 46.

OQ intorno al dato angolo solido in O, la solidità di essa si avrà prendendo la sesta parte di quella del parallelepipedo che si compirebbe col dato angolo solido O, e co' lati OA, OP, OQ. E sarà poi facile il ridurre al caso precedente la valutazione della solidità di una piramide, dati tutti i sei lati di essa.

PROPOSIZIONE V.

PROBLEMA.

fig. 47. 229. *Con gli stessi dati del Problema precedente, determinare le diagonali di quel parallelepipedo.*

Soluz. É chiaro che queste diagonali sieno quattro, due che sono quelle stesse del parallelogrammo AOEF, che passa pe' lati AO, EF del parallelepipedo, e due altre che appartengono per diagonali all'altro parallelogrammo HPQG, che passa pe' lati PH, QG di tal solido.

Or ecco in qual modo bisognerà condursi per determinarle.

$OE^2 = OP^2 + PE^2 + 2OP \times PE \cos.POQ = p^2 + q^2 + 2pq \cos.a$ e quindi $OE = \sqrt{(p^2 + q^2 + 2pq \cos.a)}$. Ed è poi

* 77. $\cos.POE = \frac{OP^2 + OE^2 - PE^2}{2PO \times OE} = \frac{p + q \cos.a}{\sqrt{(p^2 + q^2 + 2pq \cos.a)}}$

* 75. $\text{sen.}POE = \frac{PE \times \text{sen. } POQ}{OE} = \frac{q \text{ sen.} a}{\sqrt{(p^2 + q^2 + 2pq \cos.a}}$

Di più nell'angolo solido O del parallelepipedo proposto, conoscendosi i tre angoli piani in O, che lo comprendono, si potrà determinare l'inclinazione scambievole di que'piani in cui essi esistono, col risolvere il fig. 45. triangolo sferico ACB che sottende quell'angolo solido,

per determinarvi gli angoli da' lati* ; che perciò sarà * 127.

$$\text{cos. B} = \frac{\text{cos.}b - \text{cos.}a\ \text{cos.}c}{\text{sen.}a\ \text{sen.}a} \quad * \quad * 151.$$

e quindi nell' altro triangolo sferico ABC′, che sottende l'altro angolo solido in O compreso dagli angoli piani AOP, POC′ inclinati tra loro nell' angolo dato B, si avrà fig. 47.

$$\text{cos.}b' = \text{cos.}a'\ \text{cos.}c + \text{sen.}\ a'\ \text{sen.}\ c\ \text{cos. B}^* \quad * 151.$$

cioè. sostituendo per cos.a' e sen.a' i loro valori di sopra ritrovati, e poi riducendo, sarà

$$\text{cos.}b' = \text{cos.AOE} = \frac{p\ \text{cos.}\ c + q\ \text{cos.}\ b}{\sqrt{(\ p^2+q^2+2pq\ \text{cos.}\ a\ )}}$$

Finalmente nel triangolo AOE essendo

$$\text{AE}^2 = \text{AO}^2 \times 2\text{AO} \times \text{OE cos. AOE}$$

si avrà; fatte le convenienti riduzioni . . . . . .

$$\text{AE}^2 = r^2 + p^2 + q^2 + 2pq\ \text{cos.}a + 2pr\ \text{cos.}c + 2qr\ \text{cos.}b$$

E siccome il valore del quadrato dell' altra diagonale OF non si distingue da quello della già ottenuta, se non perchè il coseno dell' angolo OAF supplemento dell' angolo AOE, è di segno contrario a quello di quest' angolo ; perciò si avrà

$$\text{OF}^2 = r^2 + p^2 + q^2 + 2pq\ \text{cos.}a - 2pr\ \text{cos.}\ c - 2qr\ \text{cos.}b$$

Or per avere le altre due diagonali HQ, GP del parellelepipedo proposto, sarebbe bisogno di fare tutti gli stessi passaggi finora fatti, valendosi però dell' angolo solido in P invece di quello in O ; ed in quell' angolo solido, de' tre angoli piani che lo comprendono, i due HPO, OPE essendo i supplementi degli altri AOP, POQ (c, a), due de' tre che comprendono l' angolo solido in O, (il terzo HPE è uguale al terzo AOQ) ; debbono perciò aver quelli i coseni di contrario segno a' coseni di questi. Adunque si avranno le espressioni de' quadrati delle diagonali HQ, GP cambiando rispettivamente nelle già ritrovate per AE^2, FO^2

i segni di cos.a, e cos.c, e così facendo sarà

$$HQ^2 = r^2 + p^2 + q^2 - 2pq\ \cos.a - 2pr\ \cos.c + 2qr\ \cos.b$$
$$PG^2 = r^2 + p^2 + q^2 - 2pq\ \cos.a + 2pr\ \cos.c - 2qr\ \cos.b$$

230. *Scol.* Sommando insieme le espressioni ottenute nel precedente Problema per le quattro diagonali di un parallelepipedo, si vedrà esser

$$AE^2 + OF^2 + HQ^2 + CP^2 = 4\,(r^2 + p^2 + q^2)$$

cioè: *la somma de' quadrati delle quattro diagonali di un parallelepipedo è il quadruplo della somma de' quadrati de' tre lati intorno ad un angolo solido del medesimo.*

ELEMENTI

DI

TRIGONOMETRIA.

LIBRO VI.

DELL' USO CHE PUO' FARSI DELLE FORMOLE TRIGONOMETRICHE NELLA SOLUZIONE ALGEBRICA DI TALUNI PROBLEMI, CHE DEBBONO POI ESSER GEOMETRICAMENTE COSTRUITI.

231. Le formole Trigonometriche principali non sono altro, come si è tante volte veduto, che il risultamento di proporzioni geometriche nelle quali si è espresso un de' termini per mezzo degli altri tre; esse dunque in loro implicitamente comprendono quelle analogie donde sono derivate, e quindi possonsi utilmente impiegare nel risolvimento de' Problemi in risparmio di proporzioni risultanti da triangoli dati di specie. E questi Problemi resteranno tuttavia suscettivi di una convenevole geometrica composizione, purchè o quelle formole, o analogie che esse dinotano, necessarie solamente allo sviluppo della catena de' dati per conseguenza, svaniscano da loro medesime nell'equazione

finale al Problema; il che non di rado avviene, o pure ottenuta quella si sappiano esse maestrevolmente trasmutare ne' convenevoli rapporti, che rappresentano. E noi l'una e l'altra delle suddette cose dinoteremo meglio co' seguenti Problemi, de' quali non ne abbiamo multiplicato il numero, per lasciar luogo a' giovani di esercitarsi da loro medesimi.

Avvertiremo intanto, che siccome l'eleganza nella soluzione de' Problemi, la qual consiste principalmente nella facilità della loro composizione, è la primaria qualità che i Geometri accorti vi richieggono; così colui che si occupa a risolverli deve sempre preferir que' mezzi, nella multiplicità de' metodi che la Geometria e l'Analisi somministra, che sono più conducenti allo scopo suddetto. Che perciò non converrà usare le formole trigonometriche per l'oggetto sopraindicato, se non quando effettivo vantaggio se ne ritragga in ottenerne l'equazione: e debbono poi le trasformazioni da farsi, se mai occorrano per renderla scevra da quantità trigonometriche, esser semplici, e facili; sicchè non si abbia, prima di giungere alla costruzione geometrica dell'equazione, a durar molti stenti, e molta fatica in renderla puramente algebrica. E potrà anche farsi uso di formole trigonometriche in dimostrar Teoremi quando in quelle dimostrazioni vi sia necessario l'uso de' triangoli simili, come in più luoghi del presente Trattato si è potuto vedere.

PROPOSIZIONE XI.

PROBLEMA.

232. *Dati i lati di un quadrilatero inscritto nel cerchio; determinare le diagonali.*

Soluz. Sia ABCD quel quadrilatero, i cui lati fig. 48.
AB, BC, CD, DA dicansi rispettivamente a, b, c, d. Si esprima inoltre con x la diagonale AC, e con y l altra BD.

Ed essendo nel triangolo ABC, $x^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos.B$
$= a^2 + b^2 + 2ab \cos.D$; e $\cos.D = \frac{c^2 + d^2 - x^2}{2cd}$, sarà * 77.

$$x^2 = a^2 + b^2 + 2ab \left(\frac{c^2 + d^2 - x^2}{2cd} \right).$$

Donde si avrà

$$x = \sqrt{\left(\frac{(a^2 + b^2)\, cd + (c^2 + d^2)\, ab}{cd + ab} \right)}$$

E similmente si troverà essere

$$y = \sqrt{\left(\frac{(a^2 + d^2)\, bc + (b^2 + c^2)\, ad}{bc + ad} \right)}$$

Le quali espressioni delle diagonali, sono, come ben si vede, scevre da grandezze trigonometriche, e geometricamente costruibili.

PROPOSIZIONE II.

PROBLEMA.

233. *Date tre rette, ritrovare il raggio di quel circolo in cui essendo esse successivamente adattate, verrebbero a sottendere una mezza circonferenza.*

fig. 49. *Soluz.* Sia ABCD il circolo cercato, ed AB, BC, CD dinotino le date tre rette, adattate successivamente in esso per corde, sicchè l'arco ABCD sia una mezza circonferenza, cioè 180°.

Si dinoti la corda AB per a, la BC per b, e la CD per c, ed il raggio ignoto DE per x. Inoltre si chiamino α, β, γ gli archi AB, BC, CD; sarà

* 30. $$\text{sen.}\tfrac{1}{2}\alpha = \frac{a}{2x} \text{ e } \cos.\tfrac{1}{2}\alpha = \sqrt{\left(1 - \frac{a^2}{4x^2}\right)}$$

$$\text{sen.}\tfrac{1}{2}\beta = \frac{b}{2x} \text{ e } \cos.\tfrac{1}{2}\beta = \sqrt{\left(1 - \frac{b^2}{4x^2}\right)}$$

e finalmente $\text{sen.}\frac{1}{2}\gamma = \frac{c}{2x}$. Or perchè i tre archi α, β, γ compiono 180°; perciò ciascun di essi è quanto 180° meno la somma degli altri due. Adunque sarà

$$\text{sen.}\tfrac{1}{2}\gamma = \text{sen.}\tfrac{1}{2}\left(180° - (\alpha+\beta)\right)$$

$$= \cos.\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta) = \cos.\tfrac{1}{2}\alpha \cos.\tfrac{1}{2}\beta - \text{sen.}\tfrac{1}{2}\alpha \text{ sen.}\tfrac{1}{2}\beta$$

e sostituendo per ciascuna delle quantità trigonometriche contenute nella precedente equazione le loro corrispondenti espressioni simboliche di sopra ritrovate, sarà

$$\frac{c}{2x} = \left(1 - \frac{a^2}{4x^2}\right)\sqrt{\left(1 - \frac{b^2}{4x^2}\right)} - \frac{ab}{4x^2}$$

Dalla quale equazione, per mezzo delle ovvie riduzioni

si avrà quella al proposto Problema, ch' è la seguente

$$x^3 - 1/4\,(a^2+b^2+c^2) - 1/4\,abc$$

come per altre vie aveva ottenuto anche il Newton (*).

SCOLIO.

234. Le soluzioni de' due precedenti Problemi sono tratte dalla Trigonometria del Signor Cagnoli.

PROPOSIZIONE III.

PROBLEMA.

235. *Inclinare da un angolo A del quadrato ABCD fig. 80 la retta AFE in modo che la parte FE di essa, che resta frapposta tra i lati dell' angolo C opposto ad A, sia uguale ad una retta data.*

Soluz. Pongasi AB$=a$, FE$=b$, e tang. DAE $= x$, sarà perciò seg.DAE $= \sqrt{(1+x^2)}$

Or 1 : tang. A $[x]$ :: AD $[a]$: DE $= ax$

e perciò CE $= ax - a$. Ma è poi

x : $\sqrt{(1+x^2)}$ :: CE $[ax-a]$: EF $[b]$.

Adunque sarà

$$bx = (a-ax)\sqrt{(1+x^2)}$$

e quadrando ambi i membri si avrà

$$b^2x^2 = a^2 - 2a^2x + 2a^2x^2 - 2a^2x^3 + a^2x^4$$

Or se suppongansi le linee trigonometriche sopraindicate prese per un raggio espresso da a, l' equazione

(*) Arith. Univ. Sect. IV. Cap. I.

proposta dovrà diventare uniforme ne'suoi termini coll' introdurvisi l' a per moltiplicatore o divisore convenevolmente; ed essa prenderà perciò la seguente altra forma

$$b^2 x^2 = a^4 - 2a^3 x + 2a^2 x^2 - 2ax^3 + x^4$$

nella quale la x non rappresenta più la tangente trigonometrica delle Tavole; ma bensì la retta DE.

236. *Scol.* L' equazione quassù ottenuta è identica a quella, che per altre vie ottenne l' Hopital (*); ed essa si abbasserà al secondo grado, aggiungendo a^2x^2 ad ambo i membri, e poi estraendo da essi la radice quadrata, per mezzo della quale operazione si avrà

$$x^2 - ax + a^2 = + x\sqrt{(a^2 + b^2)} = + cx$$

ponendo $a^2 + b^2 = c^2$. Sicchè quell'equazione sarà il prodotto delle seguenti altre due

$$x^2 - (a+c)x + a^2 = 0$$
$$x^2 - (a-c)x + a^2 = 0$$

ove la x non rappresenta più la tangente trigonometrica di un angolo, ma effettivamente una retta come la DE, subitochè il raggio trigonometrico si è cambiato in questo caso nella quantità a, che rappresenta la AB. Ed avrà quindi luogo l' istessa composizione del Problema che diede l' Hopital nel luogo citato.

(*) Sections Coniques Lib. x.

PROPOSIZIONE IV.

PROBLEMA.

237. *Dividere in tre parti uguali un dato angolo rettilineo, o l'arco che lo sottende.*

Soluz. Essendo $\text{sen.}3\phi = 2.\text{sen.}2\phi\cos.\phi - \text{sen.}\phi$
$= 4.\cos^2.\phi\,\text{sen.}\phi - \text{sen.}\phi$
$= 4.\text{sen.}\phi(1 - \text{sen}^2.\phi) - \text{sen.}\phi$
ed eseguendo la multiplicazione, ed ordinando per rapporto a sen.ϕ, sarà

$$4.\text{sen}^3.\phi - 3.\text{sen.}\phi + \text{sen.}3\phi = 0$$

Or si dinoti per q la corda dell'arco 3ϕ, e per z quella dell'arco ϕ, le quali corde sono i doppj de'seni rispettivi di essi archi; la precedente equazione si trasformerà nell'altra tra esse corde.

$$z^3 - 3z + q = 0$$

ch'è quella stessa che per mezzo di considerazioni di triangoli simili aveva ottenuta il Cartesio nel Libro III. della sua Geometria. Ed essa geometricamente costruita darebbe la composizione del proposto Problema.

SCOLIO.

238. E quì non parmi fuor di proposito, ritornando al Teor. sulle corde dimostrato nel Lib. I.° di far vedere come senza nè meno ricorrere alle riduzioni fatte nella formola del seno dell'arco triplo, si possa agevolmente ottenere l'equazione al proposto Problema, o anche a quello universale di: *Dividere un arco dato in qualunque numero di parti uguali.* *p. VI.

As. 47. In fatti ponendo la prima corda AB=z e la sua supplementale BH, che dovrebbe essere espressa da $\sqrt{(4-z^2)}$, dinotandola per brevità con y, si avrà per le corde AB, AC, AD, AE, AF, AG, ec. che chiamerò I, II, III, IV, V, VI. ec. la seguente

TAVOLA

I.	corda	$= z$
II.		$= zy$
III.		$= z(y^2-1)$
IV.		$= z(y^3-2y)$
V.		$= z(y^4-3y^2+1)$
VI.		$= z(y^5-4y^3+3y)$
VII.		$= z(y^6-5y^4+6y^2-1)$
VIII.		$= z(y^7-6y^5+10y^3-4y)$

ec.

E ponendo nell' espressione della terza corda che chiamerò q, $\sqrt{(4-z^2)}$ invece di y, si otterrà di nuovo l' equazione al precedente Problema, e così per le altre.

239. La legge onde progrediscono le espressioni di sopra recate, ordinate rispetto alla y, è la seguente.

1.° I termini della formola di ciascuna di tali corde alternano pe' loro segni.

2.° Gli esponenti della y van decrescendo del numero 2.

3.° I coefficienti de' secondi termini delle suddette espressioni formano la progressione de' numeri naturali 0, 0, 1, 2, 3, 4, 5, ec. I coefficienti de' terzi termini sono i numeri triangolari di quest' altra serie 0, 0, 0, 0, 1, 3, 6, 10, ec. Quelli de' quarti termini sono i numeri piramidali della serie 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 4, ec. e così in seguito. E potrà pure la forma

di ogni termine di ciascuna serie rilevarsi dal termine generale di cui essa è suscettiva, essendo riducibile a differenze costanti. E finalmente la formola generale della corda di un arco che sia il multiplice n di un altro, dalla quale dipende la divisione di un arco dato in un numero n di parti, sarà la seguente

$$z\left(y^{n-1} - \frac{n-2}{1}y^{n-3} + \frac{(n-3)(n-4)}{1.2.}y^{n-5} - \frac{(n-4)(n-5)(n-6)}{1.2.3.}y^{n-7} + \text{ec.}\right)$$

E volendo inscrivere nel cerchio del raggio 1 un qualsivoglia poligono regolare, cioè volendo dividere la sua circonferenza 2π nel numero n di parti uguali, basterà porre la precedente espressione generale uguale a zero; tal divenendo essa in questo caso, poichè dinota la corda di una circonferenza di cerchio; e colla solita sostituzione di $\sqrt{(4-z^2)}$ per y si avrà l'equazione dalla quale dipende la determinazione della corda dell'arco $\frac{2\pi}{n}$.

Ma chi desidera maggior estensione al presente argomento, legga la dotta Memoria del Signor Fergola inserita nel Vol. I. degli Atti della nostra Reale Accademia delle Scienze di recente pubblicato, dalla quale abbiamo noi tratte le considerazioni recate in questo Scolio.

NOTE

AL LIBRO I.

Alle Prop. VII. VIII.

Crediamo di far cosa utile a' giovani recando qui l'ordinaria maniera adoperata da'Trigonometri in dimostrare questi due Teoremi.

Sieno BE, ER gli archi proposti, i cui seni sieno EH, RD, e CH, CD i coseni: sia poi RN il seno della loro somma, cioè dell' arco REB, PQ il seno della differenza di essi, cioè dell' arco PB. fig. 51.

Si compia la figura come si vede. Ed essendo simili i triangoli CEH, CDG, sta CE : EH :: CD : DG, cioè chiamando φ e θ gli archi BE, ER, e dinotando per 1 il raggio CE,

$$1 : \text{sen. } \varphi :: \cos. \theta : DG = \text{sen.}\varphi \cos.\theta$$

Similmente per gli altri triangoli simili RDF, CEH sta CE : CH :: RD : RF, cioè $1 : \cos.\varphi :: \text{sen.}\theta : RF$. E sarà quindi $RF = \text{sen.}\theta \cos.\varphi$. Laonde la RN, cioè $\text{sen.}(\varphi+\theta)$, essendo $= NF + FR$, ossia a $GD + FR$, si avrà perciò

$$\text{sen.}(\varphi + \theta) = \text{sen. } \varphi \cos.\theta + \text{sen. } \theta \cos.\varphi$$

Inoltre per essere RD=DP, è anche RF=FS; che perciò $PQ = DG - RF$, darà

$$\text{sen. } (\varphi - \theta) = \text{sen. } \varphi \cos.\theta - \text{sen. } \theta \cos.\varphi.$$

Ritornando nuovamente agli stessi triangoli simili

considerati di sopra, si vedrà che pe' triangoli simili ECH, DCG debba essere CE : CH :: CD : CG, cioè

$$1 : \cos.\varphi :: \cos.\theta : CG = \cos.\varphi \cos.\theta$$

e che per gli altri triangoli simili CEH, RDF si abbia CE : EH :: RD : DF, cioè $1 : \text{sen}.\varphi :: \text{sen}.\theta : DF = \text{sen}.\varphi \text{ sen}.\theta$. Laonde CN, ch' è uguale a CG—GN = CG—DF, sarà quanto $\cos.\varphi \cos.\theta - \text{sen}.\varphi \text{ sen}.\theta$, e CQ, ch' è quanto CG + GQ, cioè CG + GN, per essere GQ=GN, siccome è PD=DR, sarà uguale a $\cos.\varphi \cos.\theta + \text{sen}.\varphi \text{ sen}.\theta$. Ma CN è lo stesso che cos. $(\varphi+\theta)$, e CQ è quanto cos. $(\varphi-\theta)$. Laonde sarà

$$\cos.(\varphi+\theta) = \cos.\varphi \cos.\theta - \text{sen}.\varphi \text{ sen}.\theta$$
$$\cos.(\varphi-\theta) = \cos.\varphi \cos.\theta + \text{sen}.\varphi \text{ sen}.\theta$$

E questa dimostrazione, col variar semplicemente la figura, si vedrà appartenere a due archi qualunque, purchè però si tenga conto de' segni de' seni e coseni degli archi dati.

Al Cor. della Prop. IX.

L' espressione di tang. 3φ si otterrà nel seguente modo.

* 50. * 51. $$\text{tang}.3\varphi = \frac{\text{tang}.\varphi + \text{tang}.2\varphi}{1-\text{tang}.\varphi \text{ tang}.2\varphi} = \frac{3.\text{tang}.\varphi - \text{tang}^3.\varphi}{1-3.\text{tang}^2.\varphi}$$

E similmente si otterrebbero le espressioni per tang. 4φ, 5φ ec.

AL LIBRO II.

Alla Prop. IV.

L'enunciazione, e la dimostrazione di questa Proposizione conveniva che fossero generalmente fatte, e non già in quel modo che trovasi ordinariamente praticato nelle istituzioni di Trigonometria.

Alla Prop. X. ed al suo Scolio.

I due risultamenti ottenuti ne' due sopra notati luoghi, possono servir di esempio per ciò ch'è stato detto nell' Introduzione al Lib. VI. intorno all'uso, che può farsi delle formole trigonometriche per la soluzione di taluni problemi geometrici.

AL LIBRO III.

Alla Prop. III.

Ciò che si dimostra in questa Proposizione, o suole assumersi senza prova, o pur dimostrarsi con ragionamenti analitici approssimanti, e che ci avrebbero di più obbligato alla ricerca della serie che rappresenta l'arco nel seno; il che da noi si voleva evitare. Abbiamo perciò tenuta un' altra strada, che ci è anche sembrata più geometrica e rigorosa.

Alla Prop. IV.

fig. 24. Questa Proposizione si dimostra ordinariamente o col supporre che gli elementi delle tangenti AL, AM prossimi ad A si confondano cogli elementi degli archi corrispondenti, che comprendono l'angolo sferico, e quindi che quest'angolo sferico sia quanto quell'angolo rettilineo, e perciò anche quanto l'altro in cui inclinansi i piani de' cerchi ADB, AEB; o pure è fondata sulla considerazione, che movendosi la semicirconferenza AEB intorno all'asse AB per descrivere la superficie sferica, il raggio OE perpendicolare ad AB descrive col suo estremo E l'arco ED, nel tempo stesso chè l'arco EA, passando da questo sito nell'altro DA, costituisce così l'angolo sferico EAD, la qual maniera di dimostrare da noi qui indicata può vedersi a disteso nella Trigonometria Sferica del Signor Delambre. La nostra dimostrazione però ci sembra procedere più geometricamente, e mettere anche, come quella della Prop. precedente, più uniformità tra il metodo di dimostrare in questi Elementi di Trigonometria, e quello tenuto negli Elementi di Geometria Elementare.

A quelle Prop. del Cap. II. che riguardano la natura dei triangoli sferici.

Le considerazioni intorno alla natura de' triangoli sferici a noi pare che debbano premettersi a' principj della risoluzione de' medesimi; poichè così richiede l'ordine geometrico: ecco perchè non siamo d'accordo con qualche moderno Analista.

Alle Prop. X. XI. e XII.

Se i triangoli sferici si potessero sempre far coincidere, come avviene ne' rettilinei, quando o hanno i lati l' un l' altro uguali, o due lati e l' angolo compreso sono rispettivamente uguali, ec., starebbero bene le dimostrazioni, che per queste Proposizioni si danno ordinariamente, e che lo stesso Signor Cagnoli ha anche adottate nella sua Trigonometria. Ma la cosa non va così, come si può rilevare da' secondi casi delle nostre dimostrazioni, le quali sono state fondate sulla corrispondenza di un triangolo sferico con un angolo solido triedro.

AL LIBRO IV.

Alla Prop. II.

È piaciuto a taluni, tal che al Delambre, di adottare per la verità enunciata in questa Proposizione la seguente dimostrazione.

Sia il triangolo sferico BZA; e C il centro della sfera cui si appartiene. Nel punto Z sien tirate le tangenti ZP, ZQ agli archi ZB, ZA, e fino a' raggi CB, CA prodotti. Finalmente si congiunga la PQ. Il triangolo PCQ darà fig. 52.

$$PQ^2 = ZP^2 + ZQ^2 - 2ZP.ZQ \cos.Z$$
$$= \tang^2.ZA + \tang^2.ZB - 2.\tang.ZA \tang.ZB \cos.Z$$

Il triangolo PCQ darà similmente

$$PQ^2 = PC^2 + CQ^2 - 2CP.CQ \cos.PCQ$$
$$= \sec^2.ZA + \sec.^2 ZB - 2.\sec.ZA \sec.ZB \cos.AB$$

poichè AB è la misura dell'angolo PCQ. Sottraggasi la prima di queste equazioni dalla seconda, e si avrà

$0 = \ldots \sec^2.ZA - \tang^2.ZA + \sec^2.ZB - \tang^2.ZB$

$- \sec.ZA \sec.ZB \cos.AB + 2.\tang.ZA \tang.ZB \cos.Z$

$0 = 1 + 1 - 2.\sec.ZA \sec.ZB.\cos.AB + 2.\tan.ZA \tan.ZB \cos.Z$

$0 = 1 - \sec.ZA \sec.ZB \cos.AB + \tang.ZA \tang.ZB \cos.Z$

cioè $\sec.ZA \sec.ZB \cos.AB = \tang.ZA \tang.ZB \cos.Z + 1$

e dividendo tutto per $\sec.ZA \sec.ZB = \frac{1}{\cos.ZA \cos.ZB}$,

ne risulterà

$\cos.AB = \sen.ZA \sen.ZB \cos.Z + \cos.ZA \cos.ZA$

o sia esprimendo i lati del triangolo per a, b, c, e gli angoli ad essi opposti per A, B, C; sarà, per un lato a

$$\cos.a = \sen.b \sen.c.\cos.A + \cos.b \cos.c$$

ch'è la stessa formola del nostro Teorema.

Ma la dimostrazione qui recata non ci sembra nè più semplice pel numero de' passaggi, e pe' principj di riduzione de' quali abbisogna, ne' più naturale di quella da noi recata.

Allo Scol. Gen. dopo la Prop. XVI.

Relativamente alla regola del Signor de Gua riportata in fine di questo Scolio conviene far avvertire, che la maniera da noi tenuta in esibire la quarta parte di un triangolo sferico, ci ha evitato di star a considerare, come fa il Cagnoli, i casi in cui la somma de' tre angoli non ecceda i 270°, o pur sia tra i 270° e 360°; o finalmente oltrepassi questo limite.

INDICE

Avvertimento. *Pag.* V

Saggio di Storia Trigonometrica. IX

LIBRO I. DELLE QUANTITA' CIRCOLARI, E DEL LORO CALCOLO. 1

CAP. I. Della divisione della circonferenza, e della misura degli angoli. 1

CAP. II. Della natura delle quantità circolari e del loro rapporto. 7

CAP. III. De' segni che appartengono alle linee trigonometriche ne' quattro diversi quadranti del cerchio; e de' valori che esse hanno negli estremi di questi. 10

CAP. IV. Del Canone Trigonometrico, e della maniera di costruirlo servendosi di principj ricavati dalla Geometria Elementare 17

CAP. V. Formole circolari, che deduconsi dalle Prop. VII, VIII., e da' loro Corollarj. 34

LIBRO II. PRINCIPJ DI TRIGONOMETRIA RETTILINEA. 39

CAP. I. Principj per la risoluzione de'triangoli. 42

CAP. II. Applicazione de'principj stabiliti nel precedente Capitolo all'effettiva risoluzione de'triangoli. 49

CAP. III. Della maniera di determinare i segmenti della base, e la perpendicolare, ne' diversi casi di risolvimento proposti nel precedente Capitolo pe' triangoli obbliquangoli; e di alcune altre ricerche analoghe. 56

CAP. IV. Di alcuni altri casi in cui le tre parti date per la risoluzione di un triangolo sono diversamente combinate. 63

LIBRO III. DE' TRIANGOLI SFERICI. 73

CAP. I. Definizioni, e Nozioni preliminari. 73

CAP. II. Della Natura, e delle Proprietà de'Triangoli Sferici. 80

LIBRO IV. Principj di Trigonometria Sferica. 89

CAP. I. Principj generali per la risoluzione de'triangoli sferici. 89

CAP. II. Riduzione delle formole precedenti, nel caso, che il triangolo sferico abbia un angolo retto. 98

CAP. II. Applicazione de' principj stabiliti ne' due predenti Capitoli all' effettiva risoluzione de' triangoli sferici. 102

CAP. IV. Di alcuni triangoli sferici la cui risoluzione dipende da quella de'triangoli sferici rettangoli. 112

CAP. V. Ricerche geometriche intorno a'casi dubbj nella risoluzione de'triangoli sferici. 115

CAP. VI. Regole Neperiane, e loro uso vantaggioso nella risoluzione de' triangoli sferici. 122

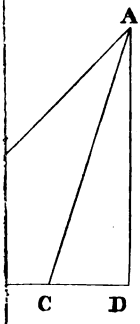
CAP. VII. Della valutazione della perpendicolare e de' segmenti della base ne' triangoli sferici. 136

CAP. VIII. Della misura della superficie e del perimetro di un triangolo sferico. 143

LIB. V. Uso delle Formole Trigonometriche nella soluzione di taluni Problemi Geometrici. 149

LIB. VI. Dell' uso che può farsi delle formole Trigonometriche nella soluzione algebrica di taluni problemi, che debbono poi esser geometricamente costruiti. 159

NOTE. 169



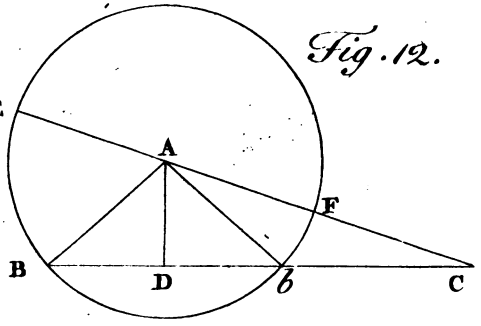


Fig. 12.

Fig. 15

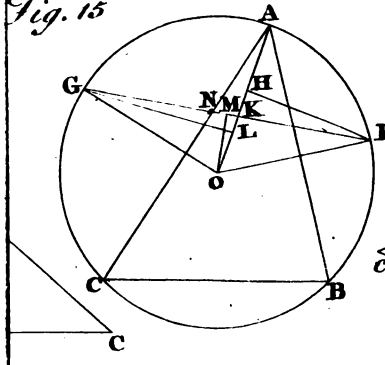


Fig. 16.

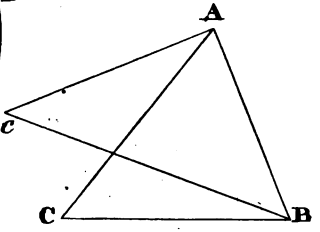


Fig. 19.

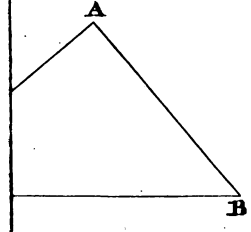
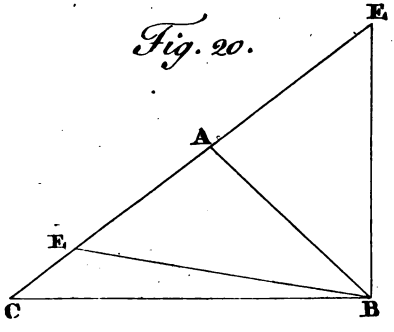


Fig. 20.



THE NEW YORK
PUBLIC LIBRARY
ASTOR, LENOX AND
TILDEN FOUNDATIONS

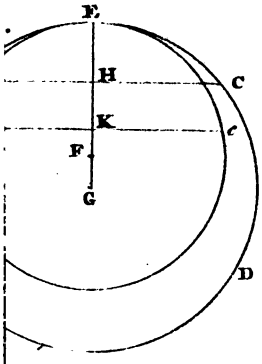


Fig. 24.

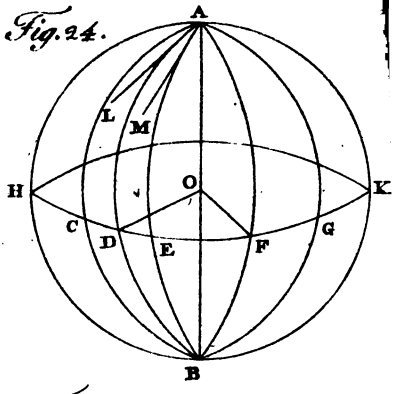


Fig. 28.

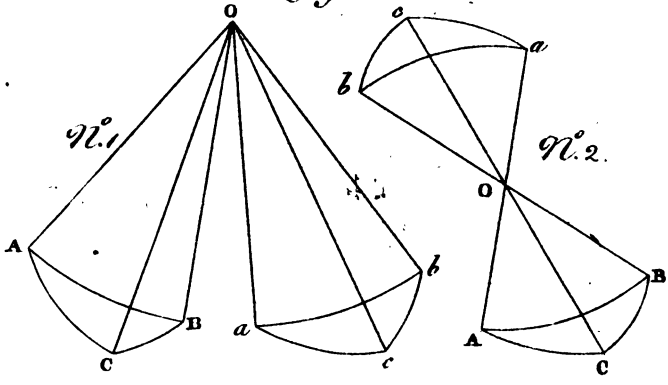


Fig. 31.

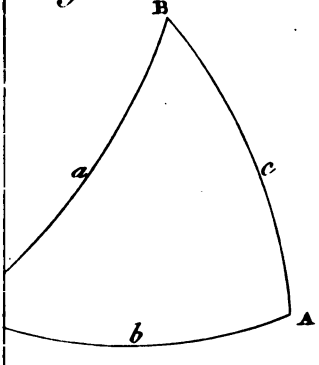
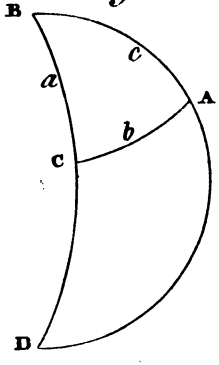
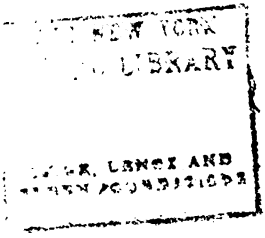


Fig. 32.




NEW YORK
LIBRARY
LENOX AND

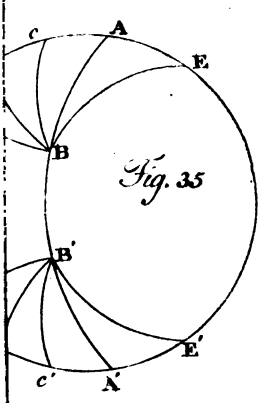


Fig. 35

Fig. 36

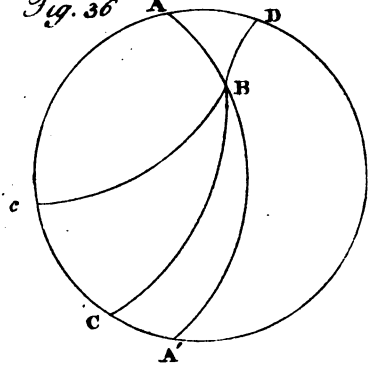


Fig. 38.

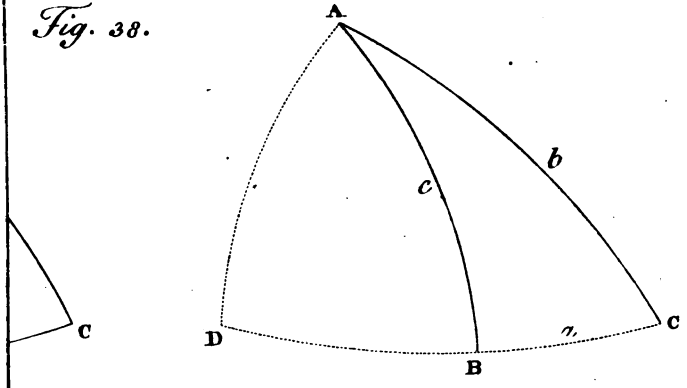
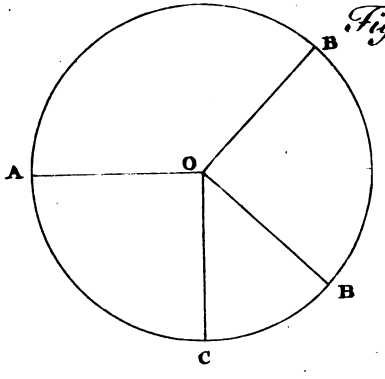


Fig. 40.

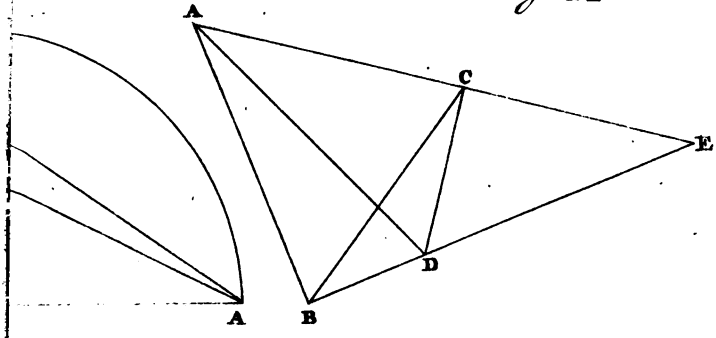


Fig. 41.



NEW YORK
PUBLIC LIBRARY
ASTOR, LENOX AND
TILDEN FOUNDATIONS

Fig. 44.



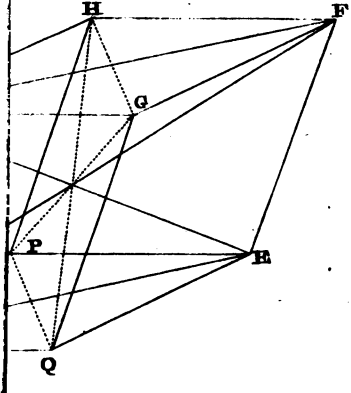
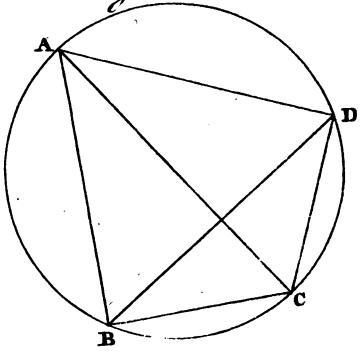


Fig. 48.



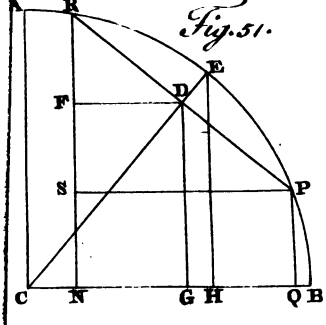


Fig. 51.

Fig. 52.

