

Informazioni su questo libro

Si tratta della copia digitale di un libro che per generazioni è stato conservata negli scaffali di una biblioteca prima di essere digitalizzato da Google nell'ambito del progetto volto a rendere disponibili online i libri di tutto il mondo.

Ha sopravvissuto abbastanza per non essere più protetto dai diritti di copyright e diventare di pubblico dominio. Un libro di pubblico dominio è un libro che non è mai stato protetto dal copyright o i cui termini legali di copyright sono scaduti. La classificazione di un libro come di pubblico dominio può variare da paese a paese. I libri di pubblico dominio sono l'anello di congiunzione con il passato, rappresentano un patrimonio storico, culturale e di conoscenza spesso difficile da scoprire.

Commenti, note e altre annotazioni a margine presenti nel volume originale compariranno in questo file, come testimonianza del lungo viaggio percorso dal libro, dall'editore originale alla biblioteca, per giungere fino a te.

Linee guide per l'utilizzo

Google è orgoglioso di essere il partner delle biblioteche per digitalizzare i materiali di pubblico dominio e renderli universalmente disponibili. I libri di pubblico dominio appartengono al pubblico e noi ne siamo solamente i custodi. Tuttavia questo lavoro è oneroso, pertanto, per poter continuare ad offrire questo servizio abbiamo preso alcune iniziative per impedire l'utilizzo illecito da parte di soggetti commerciali, compresa l'imposizione di restrizioni sull'invio di query automatizzate.

Inoltre ti chiediamo di:

+ *Non fare un uso commerciale di questi file* Abbiamo concepito Google Ricerca Libri per l'uso da parte dei singoli utenti privati e ti chiediamo di utilizzare questi file per uso personale e non a fini commerciali.

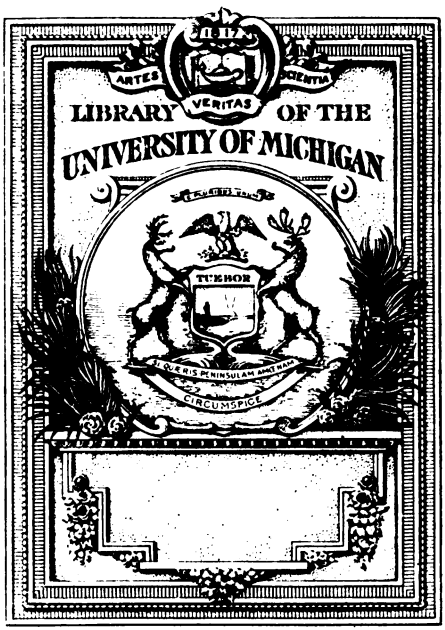
+ *Non inviare query automatizzate* Non inviare a Google query automatizzate di alcun tipo. Se stai effettuando delle ricerche nel campo della traduzione automatica, del riconoscimento ottico dei caratteri (OCR) o in altri campi dove necessiti di utilizzare grandi quantità di testo, ti invitiamo a contattarci. Incoraggiamo l'uso dei materiali di pubblico dominio per questi scopi e potremmo esserti di aiuto.

+ *Conserva la filigrana* La "filigrana" (watermark) di Google che compare in ciascun file è essenziale per informare gli utenti su questo progetto e aiutarli a trovare materiali aggiuntivi tramite Google Ricerca Libri. Non rimuoverla.

+ *Fanne un uso legale* Indipendentemente dall'utilizzo che ne farai, ricordati che è tua responsabilità accertati di farne un uso legale. Non dare per scontato che, poiché un libro è di pubblico dominio per gli utenti degli Stati Uniti, sia di pubblico dominio anche per gli utenti di altri paesi. I criteri che stabiliscono se un libro è protetto da copyright variano da Paese a Paese e non possiamo offrire indicazioni se un determinato uso del libro è consentito. Non dare per scontato che poiché un libro compare in Google Ricerca Libri ciò significhi che può essere utilizzato in qualsiasi modo e in qualsiasi Paese del mondo. Le sanzioni per le violazioni del copyright possono essere molto severe.

Informazioni su Google Ricerca Libri

La missione di Google è organizzare le informazioni a livello mondiale e renderle universalmente accessibili e fruibili. Google Ricerca Libri aiuta i lettori a scoprire i libri di tutto il mondo e consente ad autori ed editori di raggiungere un pubblico più ampio. Puoi effettuare una ricerca sul Web nell'intero testo di questo libro da `http://books.google.com`


ARTES
SCIENTIA
VERITAS
LIBRARY OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
TUEBOR
SI QUERIS PENINSULAM AMŒNAM
CIRCUMSPICE

ELEMENTI DI GEOMETRIA

DEL SIGNOR

CLAIRAUT

DELL'ACCADEMIA REALE DELLE SCIENZE,
E DELLA SOCIETA' REALE DI LONDRA

TRADOTTI

DAL FRANCESE IN LINGUA ITALIANA

EDIZIONE SECONDA

CORRETTA, ED AUMENTATA.



IN ROMA MDCCLXXI.

A ſpeſe di VENANZIO MONALDINI Libraro al Corſo
NELLA STAMPERIA DI GIOVANNI ZEMPEL.

CON LICENZA DE' SUPERIORI.

Mathematics
Water
8-2-26
10622



A SUA ECCELLENZA
IL SIGNOR
GIACOMO TIEPOLO
PATRIZIO VENETO.

QUANDO m'accinsi a questa nuova Edizione de' Geometrici Elementi del CLAIRAUT già da me altra volta pubblicati in no-

 stro

ſtro Italiano Linguaggio, feci nell' animo mio diſegno di dedicarla a Giovane illuſtre, che, proſſimo ad intraprendere lo ſtudio delle Scienze, per facilitarſi con eſſe il ſoſtentamento de' luminoſi carichi dalla coſpicua condizion di ſua naſcita deſtinatigli, deſſe principio dalla Geometria. Avvegnacchè di molti, e graviſſimi Filoſofi ella è opinione, che lo ſtudio

dio d'ogni altra ſcienza malagevole ſia, e preſſocchè ſterile, e infruttuoſo anche a Giovani dalla natura dotati di fervido, e perſpicace ingegno, qualora non abbiano prima eſſi imparato a diſtaccare il penſiero dai ſenſibili oggetti, che ſpeſſo ingannano, e a renderlo abile a ſciogliere francamente il volo alle più aſtratte, e ſublimi cognizioni della Geo-

metria principal parte della Matematica Facoltà, le di cui ſpeculazioni tutte verſano ſopra principj non meno infallibili, che luminoſi. Non ebbi appena condotta a fine queſta mia Edizione, che la Fortuna recandovi in Roma inſieme col voſtro inclito, e magnanimo Genitore dalla Sereniſſima Veneta Repubblica ultimamente preſcelto all' onorevoliſſimo carico

rico di ſuo Ambaſciatore, preſſo la Santa Apoſtolica Sede, mi preſentò in Voi l'illuſtre Giovane diſegnato. Eſce dunque il Libro alla pubblica luce fregiato del voſtro per molti sì proprj, che paterni, ed aviti pregi riſpettabiliſſimo Nome: e per tal onore allo ſteſſo Libro da me procurato niente io non dubito, ch'egli per gratitudine, ed in corriſpon-

den-

denza, allorchè con Voi converſerà frequentemente, come ſpero, vi ricorderà mai ſempre, che io vivamente aſpiro all' altro maggiore di eſſere da tutta la voſtra nobiliſſima Caſa per tale conſiderato, quale con invariabile ſommo oſſequio mi proteſto

DI VOSTRA ECCELLENZA

Vmo Dmo Obblmo Servitore
Giuſeppe Antonio Monaldini.

TAVOLA
DELLE MATERIE.
PRIMA PARTE.

De' mezzi, che si devono naturalmente impiegare per avere la misura de' Terreni.

II. *La linea retta è la linea più corta, che si possa tirare da un punto all'altro, e conseguentemente la misura della distanza tra due punti.* Pag. 14

III. *Una linea, che cade sopra un'altra, senza pendere verso alcuna parte, è perpendicolare a questa linea.* 15

IV. *Il rettangolo è una figura di quattro lati tra loro perpendicolare.* 16

Ed il quadrato è un rettangolo, che ha i quattro lati eguali. ivi

V. *Maniera di alzare una perpendicolare.* 17

VI. *Il circolo è la traccia intera, che descrive la punta mobile d'un compasso,*

passo, mentre che gira intorno dell' altra punta. 19
Il centro è il luogo del punto fisso. ivi
Il raggio è l'intervallo, col quale è aperto il compasso. ivi
Il diametro doppio del raggio. ivi
VII. *Maniera di calare una perpendicolare.* ivi
VIII. *Dividere una linea in due parti uguali.* 22
IX. *Dato un lato, fare un quadrato.* ivi
X. *Fare un rettangolo, data la lunghezza, e larghezza.* 23
XI. *Menare una parallela a una linea per un punto dato.* 24
XII. *La misura d'un rettangolo è il prodotto della sua altezza per la sua base.* 27
XIII. *Le figure rettilinee sono quelle, che vengono terminate da linee rette.* 28
Il triangolo è una figura terminata da tre linee rette. 29
XIV. *La diagonale d' un rettangolo è la linea, che lo divide in due triangoli eguali.* 30
Li triangoli rettangoli sono quelli, che

che hanno due de' loro lati perpendicolari l'uno all'altro. ivi
Un triangolo è la metà del rettangolo, che ha la medesima base, e altezza. 31
Dunque la sua misura è la metà del prodotto dell' altezza per la sua base. ivi
XV. I triangoli di eguale altezza, e egual base, sono ancora di egual superficie. 32
XVII. I triangoli, che hanno la medesima base: e sono tra le medesime parallele, sono d'egual superficie. 34
XVIII. I parallelogrammi sono figure di quattro lati, de' quali i due opposti sono paralleli. 35
Si misura, moltiplicando, l' altezza per la base. ivi
XIX. I parallelogrammi, che hanno la base comune, e sono tra le medesime parallele, sono di egual superficie. 36
XX. Li poligoni regolari sono figure terminate da lati uguali, e ugualmente inclinati gli uni agli altri. 37
XXI. Maniera di descrivere un poligono

no d' un numero determinato di lati. ivi
Il pentagono ha 5 lati, l'esagono 6., l'eptagono 7., l'ottagono 8., l'enneagono 9., il decagono 10. &c. 38
XXII. *Misura delle superficie d' un poligono regolare.* ivi
L'apotema è la perpendicolare tirata dal centro della figura ad uno de' suoi lati. ivi
XXIII. *Il triangolo equilatero è quello, che ha tutti tre i lati uguali.* 39
Maniera di descriverlo. ivi
XXVI. *Sapendo tre lati d'un triangolo, fare un'altro triangolo a quello uguale.* 43
XXVII. *Un' angolo è l' inclinazione d' una linea all'altra linea.* 45
XXVIII. *Maniera di fare un' angolo uguale ad un'altro.* ivi
Essendo dati due lati, e l'angolo da essi compreso, è determinato il triangolo. 46
XXIX. *Seconda maniera di fare un'angolo uguale ad un'altro.* 47
La corda d'un'arco d'un circolo è la ret-

retta, che è terminata dalle due estremità dell'arco. ivi
XXX. *Due angoli, ed un lato determinano il triangolo.* 48
XXXI. *Il triangolo isoscele è quello, che ha due lati uguali.* 49
Gli angoli, che questi due lati fanno con la base, sono tra loro eguali. 50
XXXIV. *In che consiste la similitudine di due figure.* 53
XXXVI. *Maniera di descrivere una figura simile ad un'altra.* 55
XXXVIII. *Se due angoli d'un triangolo sono eguali a due angoli di un'altro triangolo, il terzo angolo dell'uno sarà uguale al terzo dell'altro.* 58
XXXIX. *Due triangoli, che hanno i respettivi angoli uguali, avranno ancora i lati proporzionali.* 59
XL. *Dividere una linea in quante parti uguali uno vorrà.* 63
XLI. *Cosa sia una linea quarta proporzionale a tre altre, come si trovi.* 64
XLII. *Le altezze de' triangoli simili sono proporzionali a' loro lati.* 65

Le

XLIV. *Le aree de' triangoli simili sono, come li quadrati de' lati omologhi.* 66
XLV. *Proprietà delle figure simili ricavate da quelle de' triangoli.* 68
XLVII. *Le aree delle figure simili sono tra loro, come i quadrati de' lati omologhi.* 71
XLVIII. *Le figure simili non sono differenti, che per le scale, sù cui sono state costruite.* 72
L. *Maniera di misurare la distanza di un luogo inaccessibile.* 73
LII. *Un'angolo ha per misura l'arco di circolo compreso tra suoi lati.* 76
LIII. *Il circolo è diviso in* 360. *gradi, ciascun grado in* 60. *minuti &c.* 77
LIV. *L'angolo retto ha* 90. *gradi, ed i suoi lati sono perpendicolari l'uno all' altro.* ivi
LV. *L'angolo acuto è quello, che è minore del retto.* 78
LVI. *Un' angolo ottuso è quello, che è maggiore del retto.* ivi
LVII. *La somma degli angoli fatti dalla medesima parte sù una retta, e che hanno il medesimo vertice, comprende* 180. *gradi.* ivi

Tut-

LVIII. *Tutti gli angoli, che si possan o fare intorno ad un medesimo punto, presi insieme sono uguali a quattro retti.* ivi

LIX. *Uso dell' istrumento chiamato semicircolo, per prendere la grandezza d'un' angolo.* 79

LX. *Uso di un'istrumento, per fare un angolo di un numero determinato di gradi.* 80

LXIII. *Gli angoli alterni sono gli angoli opposti, che forma da una parte, e dall' altra una linea retta, che cade su due parallele.* 85

Questi angoli sono uguali. ivi

LXIV. *La somma di tre angoli di un triangolo è uguale a due angoli retti.* 86

LXVIII. *L'angolo esterno di un triangolo è uguale a due angoli interni opposti.* 87

LXIX. *Un angolo del triangolo isoscele dà gli altri due.* 88

LXX. *Gli angoli di un triangolo equilatero sono ciascuno di 60. gradi.* 89

LXXI *Descrizione dell' esagono.* ivi

LXXII. *La metà dell' angolo al centro dell'esagono, dà l'angolo al centro del dodecagono.* 90
LXXIII. *Dividere un'angolo in due angoli uguali.* ivi
LXXIV. *Descrizione de' poligoni di 24., 48. &c. lati.* 92
LXXV. *Descrizione dell'ottogono.* ivi
E de' poligoni di 16., 32., &c. lati. 93

PARTE SECONDA

Del metodo Geometrico di paragonare le Figure rettilinee.

I. *DUE rettangoli, che hanno la medesima altezza, sono nella ragione medesima delle loro basi.* 97
V. *Maniera di trasformare un' rettangolo in un'altro, che abbia un' altezza data.* 98
VI. *Secondo modo di trasformare un' rettangolo in un' altro di data altezza.* 100
VII. *Si dimostra rigorosamente, che se due rettangoli sono eguali, la base del*

del primo è alla baſe del ſecondo, come l'altezza del ſecondo all'altezza del primo. 101

VIII. *Se di quattro linee la prima è alla ſeconda, come la terza alla quarta, il rettangolo formato per la prima, e per la quarta ſarà uguale al formato dalla ſeconda, e dalla terza.* 103

IX. *Quattro quantità, delle quali la prima ſia alla ſeconda, come la terza alla quarta, ſi dicono formare una proporzione.* ivi

X. *De' quattro termini d'una proporzione il primo, ed il quarto ſono chiamati eſtremi; ſi chiamano medi il ſecondo, ed il terzo.* 104

XI. *In una proporzione il prodotto degli eſtremi è uguale al prodotto de' medi.* ivi

XII. *Se il prodotto degli eſtremi è uguale al prodotto de' medi, que' quattro termini formano una proporzione.* ivi

XIII. *Quindi ſi ricava la regola del tre.* 105

Quale ſia la maniera di trovare il quarto termine di una proporzione, dati i tre primi. 106.

XVI. *Fare un quadrato doppio di un altro.* 10
XVII. *Fare un quadrato eguale a du altri presi insieme.* 11
XVIII. *L'ipotenusa d'un' triangolo ret tangolo è il suo lato maggiore.* 11
E il quadrato di questo lato è uguale alla somma de' quadrati fatti sù gl altri due. 11
XIX. *Di dove si tira una maniera sem plice di ridurre due quadrati un solo.* 11
XX. *Se i lati di un triangolo rettan golo servon di base a tre figur simili, la figura fatta sù l'ipote nusa uguaglierà le due altre in sieme.* 11
XXI. *Ridurre più figure simili ad un sola.* 11
XXIII. *Il prodotto, che risulta dalla moltiplicazione di un numero per se medesimo, è il quadrato di quest numero.* 11
La radice di un quadrato è il nu mero, che moltiplicato per se stes so dà il quadrato. 12
XXIV. *Un numero è multiplo di un'al tro,*

tro, quando lo contiene per ℵ *appunto più volte.* ivi

I lato di un quadrato, e la sua diagonale sono incommensurabili. 121

XX. *Altre linee incommensurabili.* 122

XXII. *I triangoli, e le figure simili hanno i loro lati proporzionali, ancora quando lati sono incommensurabili.* 126

XXIII. *E queste figure sono sempre tra loro, come i quadrati de' loro lati omologhi.* 127

PARTE TERZA

Della misura delle figure circolari, e delle loro proprietà.

I. *LA misura del circolo è il prodotto della sua circonferenza per la metà del suo raggio.* 133

II. *L'area del circolo è uguale a un triangolo, del quale l'altezza è uguale al raggio, e la base una retta eguale alla circonferenza.* 134

IV. *Se il diametro del circolo si divida in 7. parti, la circonferenza n'ha presso a 22 di queste parti.* 35
V. *Le circonferenze de' circoli sono fra loro, come i loro raggi.* vi
VI. *Le aree de' circoli sono proporzionali a' quadrati de' loro raggi.* 36
VII. *Di tre circoli, che abbiano per raggio i lati di un triangolo rettangolo, quello, che dà l'ipotenusa, è ugualo agli altri due insieme.* 38
VIII. *Una corona è lo spazio compreso tra due circoli concentrici.* 39
Per misurare un'anello, si deve moltiplicare la larghezza per la circonferenza media. 41
IX. *Il segmento di circolo è uno spazio terminato dall'arco, e dalla corda.* 142
La misura di tutte le figure circolari si riduce a quella del segmento ivi
X. *Il settore è una porzione di circolo terminata da due raggi, e dall'arco, che quelli comprendono.* 143
Sua misura è quella del segmento ivi
XI. *Trovare il centro d'un arco di circolo qualunque.* ivi

XII. *Se*

XIII. *Se da un punto qualunque della circonferenza di un ſemicircolo ſi tireranno due rette alla eſtremità del diametro, ſi avrà un angolo retto.* 147

XV. *Tutti gli angoli, che hanno il vertice alla circonferenza, e che ſono fondati ſul medeſimo arco, ſono eguali, ed hanno per comun miſura la metà dell'arco, ſul quale ſono piantati.* 150

XVIII. *La tangente al circolo è la linea, che non lo tocca, che in un punto.* 155

L'angolo al ſegmento è quello, che è fatto dalla corda, e dalla tangente. ivi

La ſua miſura è la metà dell' arco del ſegmento. ivi

XIX. *La tangente è perpendicolare al diametro, che paſſa pel punto, in cui lo tocca.* 156

XXI. *Coſa ſia un ſegmento capace di un'angolo dato.* 158

Maniera di fare un ſegmento capace di un'angolo dato. ivi

XXII. *Trovar la diſtanza di un luogo*

rispetto a tre altri, de' quali sono conosciute le posizioni. 160

XXIII. *Se due corde si seghino in un circolo, il rettangolo fatto dalle parti dell'una è uguale al rettangolo fatto dalle parti dell'altra.* 164

XXIV. *Il quadrato di una perpendicolare qualunque al diametro di un circolo è eguale al rettangolo delle due parti del diametro.* 165

XXV. *Trasformare un rettangolo in un quadrato.* ivi

XXVI. *Cosa sia una media proporzionale tra due linee rette.* 166

Maniera di trovarla. 167

XXVII. *Un'altra maniera.* ivi

XXVIII. *Trasformare una figura rettilinea in un quadrato.* 168

XXX. *Fare un quadrato, che sia ad un altro in ragion data.* 169

XXXI. *Fare un poligono, che sia ad un poligono simile in data ragione.* 170

XXXII. *Fare un circolo, che sia a un'altro circolo in ragion data.* 171

XXXIII. *Se da un punto preso fuori d'un circolo si tirino due linee, che lo dividano, i rettangoli di queste due rette*

rette per le loro parti esteriori sono uguali. 172

XXXIV. *Il quadrato della tangente è uguale al rettangolo della segante per la sua parte esteriore.* 173

XXXV. *Da un punto dato fuori di un circolo tirare la tangente a quello stesso circolo.* 174

PARTE QUARTA

Della maniera di misurare i solidi, e le loro superficie.

I. *IL cubo è una figura solida terminata da sei quadrati: ed è la comune misura de' solidi.* 177

II. *Il parallelipipedo è un solido terminato per sei rettangoli.* 178

I piani paralleli sono quelli, che conservano sempre tra loro la medesima distanza. 179

III. *Misura del parallelipipedo.* ivi

IV. *I parallelipipedi sono prodotti da un rettangolo, che si muove parallelamente a se medesimo.* 181

V. *La linea perpendicolare a un piano è quel-*

è quella, che non pende da neſſun lato sù queſto piano. 182
Egli è il medeſimo d'un piano perpendicolare a un' altro piano. ivi
VI. *La linea, che è perpendicolare a un piano, è perpendicolare a tutte le linee di queſto piano, le quali partono dal punto, ove ella cade.* 183
VIII. *Pratica ſemplice per elevare, o abbaſſare linee perpendicolari a de' piani.* 185
IX. *Una linea ſarà perpendicolare a un piano, ſe ſarà perpendicolare a due linee di queſto piano, le quali partano dal punto, ove ella cade.* ivi
X. *Maniera di elevare un piano perpendicolare ad un' altro.* 186
XI. *Tirare un piano parallelo a un'altro.* 187
XII. *Miſurare l'inclinazione di un piano sù un'altro.* 188
XIII. *Miſurare l'inclinazione di una linea sù un piano.* 189
XIV. *Nuova maniera di calare una linea perpendicolare a un piano dato.* ivi
XV. *Seconda maniera di alzare una linea*

nea perpendicolare a un piano dato. 190
XVI. *Il prisma retto è una figura solida, di cui le due basi opposte sono due poligoni uguali, e le altre facce sono rettangoli.* 191
XVII. *Formazione de' prismi retti.* ivi
XIX. *Due prismi, che hanno le basi uguali, sono nella ragione medesima delle loro altezze.* 192
XX. *Due prismi, che hanno la medesima altezza, sono nella ragione medesima, che le loro basi-* ivi
XXI. *La misura del prisma retto è il prodotto della sua base per la sua altezza.* 194
XXII. *I prismi obliqui differiscono da' prismi retti in questo, che le facce, che sono in questi rettangoli, negli altri sono parallelogrammi.* 195
XXIII. *Formazione de' prismi obliqui.* 196
XXIV. *I prismi obliqui sono uguali a' prismi retti, allorchè hanno la medesima base, e la medesima altezza.* 197
XXV. *L'istesso è de' parallelipipedi obliqui*

liqui riſpetto a' parallelipipedi retti. 198

XXXVII. *Le piramidi, che hanno la medeſima baſe, e la medeſima altezza ſono uguali.* 209

XXXVIII. *Due piramidi ſono pure uguali, ſe, avendo la medeſima altezza, le loro baſi, non eſſendo poligoni ſimili, ſono eguali alla ſuperficie.* ivi

XXXIX. *Le piramidi, che hanno la medeſima altezza, ſono tra loro, come le loro baſi.* 211

XLII. *La ſolidità di una piramide qualunque è il prodotto della ſua baſe nel terzo della ſua altezza.* 218

XLIII. *La piramide è il terzo del priſma, che ha la medeſima baſe, e la medeſima altezza.* 219

XLV. *Il Cilindro è un ſolido terminato da due baſi oppoſte, e parallele, che ſono circoli uguali, e da un piano piegato intorno le loro circonferenze.* 220

Si divide in cilindro retto, e in cilindro obliquo. 221

XLVI. *Formazione del cilindro.* ivi

XLVII. *La*

XLVII. *Lo ſuperficie curva di un cilindro retto è uguale a un rettangolo, che ha la medeſima altezza, e di cui la baſe è uguale alla ſua circonferenza.* 223

XLIX. *I cilindri, che hanno l'iſteſſa baſe, e altezza, ſono uguali in ſolidità.* 225

L. *La miſura di un cilindro qualunque è il prodotto della ſua baſe per la ſua altezza.* ivi

LI. *Il cono è una ſpecie di piramide, che ha per baſe un circolo.* 226

LII. *Si diſtingue in cono retto, e in cono obliquo.* ivi

LIII. *La ſuperficie di un cono retto ſi miſura moltiplicando la metà del ſuo lato per la circonferenza della ſua baſe.* 227

LIV. *Un ſettore di circolo è la ſuperficie ſvoltolata di un cono.* 228

LVI. *I coni, che hanno l'iſteſſa baſe, ed altezza, ſono uguali.* 229

LVII. *La lor miſura è il prodotto della baſe pel terzo dell'altezza.* ivi

LIX. *Maniera di miſurare la ſuperficie di un cono troncato.* 231

LX. *La*

LX. *La sfera è un corpo, la superficie del quale ha tutti i punti egualmente distanti dal centro.* 232
LXV. *La superficie della sfera ha per misura il prodotto del suo diametro per la circonferenza del suo circolo massimo.* 241
LXVI. *Cosa sia un segmento di sfera.* 242
Come si misura la sua superficie. ivi
LXVII. *La superficie della sfera è eguale a quella del cilindro circoscritto.* 243
LXVIII. *Le sezioni del cilindro, e della sfera hanno la medesima superficie.* 244
LXIX. *La superficie della sfera è uguale alla superficie del suo circolo massimo presa quattro volte.* ivi
LXX. *La solidità della sfera è il prodotto del terzo del raggio per l'area del massimo circolo presa quattro volte.* 245
LXXI. *La solidità della sfera è due terzi di quella del cilindro circoscritto.* 246
LXXII. *Misura della solidità d'un segmento di sfera.* ivi
LXXIII. *In*

LXXIII. *In che consiste la similitudine di due corpi terminati da' piani.* 248
LXXIV. *Condizioni, che terminano la similitudine di due cilindri retti.* ivi
LXXV. *Quelle di due cilindri obliqui.* ivi
LXXVI. *Quelle di due coni.* 249
LXXVII. *Quelle di due coni tronchi.* ivi
LXXVIII. *Le sfere, i cubi, e tutte le figure, che non dipendono, che da una sola linea, sono tutte simili.* 250
LXXIX. *In generale i solidi simili non differiscono, che per le scale, sulle quali sono stati costruiti.* ivi
LXXX. *Le superficie de' solidi simili sono trà loro, come i quadrati de' loro lati omologhi.* 251
LXXXI. *Le superficie delle sfere sono tra loro, come i quadrati de' loro raggi.* 253
LXXXIII. *I solidi simili sono tra loro, come i cubi de' loro lati omologhi.* 255
LXXXIV. *Le sfere sono tra loro, come i cubi de' loro raggi.* 256

FINE DELLA TAVOLA.

REIM-

REIMPRIMATUR,

Si videbitur Rmo Patri Sacri Palatii Apostolici Magistro.

D. Patriarch. Antioch. Vicesg.

REIMPRIMATUR,

Fr. Thomas Augustinus Ricchinius Ord. Præd. Sac. Pal. Ap. Magister.

ELE-

PREFAZIONE.



Enchè la Geometria ſia per ſe medeſima aſtratta, conviene nondimeno confeſſare, che la difficoltà, la quale provano coloro, che cominciano ad applicarviſi, proviene il più delle volte dalla maniera, con cui quella s'inſegna negli ordinarj Elementi. Si ſuol cominciare con un gran numero di definizioni, di poſtulati, di aſſiomi, e di principj preliminari, i quali moſtrano di non promettere

altro al lettore, che cose molto secche, e nojose. Le proposizioni, che quindi seguono, non fissano la mente sopra cose interessanti: e dall'altra parte essendo difficili a concepirsi, ne segue comunemente, che i principianti si straccano, e l'abbandonano prima di avere alcuna idea distinta di ciò, che si vuole loro insegnare.

Per torre questa seccaggine naturale allo studio della Geometria, alcuni Autori hanno preso il ripiego di mettere dopo ogni principale proposizione l'uso, che si può fare di quella per la pratica: ma così provano l'utilità della Geometria, senza molto facilitare il modo di apprenderla. Perchè essendo ciascheduna proposizione posta prima del suo uso, la mente non perviene

ne

ne alle idee ſenſibili, che dopo avere avuta la fatica di apprendere le idee aſtratte.

Alcune rifleſſioni, che ho io fatte ſull'origine della Geometria, mi hanno fatto ſperare di ſcanſare queſti inconvenienti, unendo queſti due vantaggi di rendere le coſe più intereſſanti, e più intelligibili a' principianti. Io ho conſiderato, che queſta ſcienza, ſiccome tutte le altre, deve eſſerſi formata per gradi; che veriſimilmente qualche neceſſità è ſtata quella, che ha fatto fare i primi paſſi, e che queſti primi paſſi non poſſono eſſer fuori della portata dé' principianti; poichè i principianti appunto in queſta facoltà gli avevano fatti.

Prevenuto da queſta idea, mi ſon io propoſto di trovare quel,

che può aver dato origine alla Geometria; ed ho procurato di ſpiegarne i principj col metodo più naturale, ſiccome quello, che ſupponevo eſſere ſtato de' primi inventori; oſſervando ſolamente di evitare tutti li falſi tentativi, ch'eſſi hanno neceſſariamente dovuto fare.

La miſura de' terreni mi è paruta la più propria ad aver dovuto far naſcere le prime propoſizioni della Geometria; e queſto è in effetto l'origine di queſta ſcienza; poichè Geometria ſignifica *miſura di terreno*. Alcuni Autori pretendono, che gli Egiziani vedendo continuamente i termini de' loro poderi diſtrutti dall'inondazioni del Nilo, gettaſſero i primi fondamenti della Geometria, cercando mezzi d'aſſicurarſi eſattamente, qual foſſe il ſito, l'eſtenſione,

ſione, la figura de' loro averi. Ma quando ancora non ci rapportiamo a queſti Autori; potrem noi dubitar di queſto; che ne' primi tempi gli uomini non abbiano cercato metodi per miſurare, e per ſpartire le loro terre? Volendo poi perfezionare queſti metodi, le ricerche particolari li hanno condotti a poco a poco a delle ricerche generali; e finalmente eſſendoſi propoſti di conoſcere eſattamente il rapporto di tutte le ſorti di grandezze, formarono una ſcienza di un oggetto molto più vaſto di quello, che avevano abbracciato al principio, ed alla quale contuttociò conſervarono il nome, che le avevano dato nella ſua origine.

Affine di ſeguire in queſt'Opera un metodo ſimile a quello degl'inventori, io comincio ſubito dallo

ſcoprire a' principianti li principj, da' quali può dipendere la ſemplice miſura de' terreni, e delle diſtanze acceſſibili, ovvero inacceſſibili &c. Da queſta paſſo ad altre ricerche, che hanno una tale analogia colle prime, che la curioſità, naturale a tutti gli uomini, li porta a fermarviciſi, ed inſieme giuſtificando queſta curioſità con qualche applicazione utile, io farò ſcorrere tutto quello, che la Geometria elementare ha di più intereſſante.

Non ſi può, ſecondo me, negare, che queſto metodo non ſia almeno adattato ad animare coloro, i quali potrebbero venirne ritirati dalla ſeccaggine delle verità Geometriche nude di applicazioni. Io ſpero di più, che avrà queſt'altra utilità più importante; che avvezzerà

zerà la mente à cercare, e ſcuoprire nuove coſe. Queſto è, perchè io sfuggo di proporre le propoſizioni ſotto la forma di Teoremi; cioè a dire di quelle propoſizioni, nelle quali ſi dimoſtra queſta, o quella verità, ſenza far vedere, come ſi è arrivato a diſcoprirla.

Se i primi Autori delle Matematiche hanno preſentato così le lor diſcoperte in forma di Teoremi, queſto è ſtato ſenza dubbio per dare un aria di maggior meraviglia alle lor produzioni, o per sfuggir la fatica di riprender la ſerie delle idee, che li avevano guidati nelle loro ricerche. Comunque ſia, mi è ſembrato molto più a propoſito di occupare continuamente i miei Lettori a riſolvere problemi; cioè a cercare li mezzi di fare qualche operazione,

o di diſcoprire qualche verità ſconoſciuta, determinando il rapporto, che vi ha tra grandezze date, ed altre grandezze incognite, che uno ſi è propoſto di trovare. Seguendo queſta via, i principianti conoſcono a ciaſcun paſſo, che lor ſi faccia fare, qual' è la ragione, che determina l'inventore; e così poſſono acquiſtare più facilmente lo ſpirito d'invenzione.

Mi ſi opporrà forſe in qualche luogo di queſti elementi, che troppo io mi rapporto al teſtimonio degli occhi; e che ſto poco attaccato al rigore delle dimoſtrazioni. Io prego coloro, che mi riprendono, ad oſſervare, come il paſſare, che io fo leggiermente ſopra alcune propoſizioni, non è che sù quelle, la verità delle quali ſi manifeſta da ſe ſubito,

bito, per poco che un le consideri. Io così pratico specialmente sul principio, ove più spesso si rincontra di simili proposizioni: perchè ho osservato, che quelli, i quali avevano della disposizione per la Geometria, avevano del piacere ad esercitare un poco il loro spirito; ed al contrario, se ne ritiravano, allorchè si ammassava delle dimostrazioni, per così dire, inutili.

Nessuno rimarrà sorpreso, perchè Euclide si metta a dimostrare, che due circoli, i quali si dividono, non hanno l'istesso centro; che un triangolo contenuto dentro un altro ha la somma de' suoi lati più piccola, che quella de' lati del triangolo, dentro il quale è compreso. Questo Geometra aveva a convincere de' sofisti ostinati, che si facevano gloria

di

di ripugnare alle verità le più evidenti. E' bisognava dunque, che allora la Geometria avesse, come appunto la Logica, il soccorso de' discorsi in forma, per serrar la bocca alle vane opposizioni. Ma le cose sono cangiate di faccia. Ogni ragionamento impiegato sopra di ciò, che il buon senso da se solo è più che sufficiente a decidere, si ha al giorno d'oggi in conto di pura perdita di tempo, e non vale, che ad oscurare la verità, ed a recar dispiacere a' Lettori.

Mi si potrebbe fare un'altra opposizione di aver tralasciato diverse proposizioni, che si sogliono porre ordinariamente negli Elementi, e di contentarmi, quanto alle proposizioni, di darne solo le principali, e fondamentali.

A que-

A queſto riſpondo io, che ſi trova in queſto trattato tutto quello, che può ſervire per adempire il mio diſegno; che le propoſizioni da me tralaſciate ſono quelle, che non poſſono per ſe medeſime eſſere di alcuna utilità, e niente contribuiſcono a facilitare l'intelligenza delle altre, che è neceſſario ſapere. Quanto alle proporzioni, quel, che io ne dico, deve baſtare per far capire le propoſizioni elementari, che le ſuppongono. Queſta è una materia, che tratterò più a fondo negli elementi dell'Algebra, che io ſto per dar fuori.

Finalmente, avendo io ſcelto la miſura de' terreni, per intereſſare i principianti a queſto ſtudio, non credo di dover temere, che ſi confondano queſti elementi coll'ordinario

nario trattato, che si da per una simil misura. In questo errore non può venire se non chi non rifletta, che la misura de' terreni non è il vero soggetto di questo libro; ma mi serve ella solamente di occasione a far discoprire le principali verità Geometriche. Io avrei potuto medesimamente pervenire a queste verità, facendo l'Istoria della Fisica, dell'Astronomia, o di qualsivoglia altra parte delle Mattematiche, che mi piacesse di sciegliere. Ma allora la moltitudine delle idee straniere, nelle quali sarebbe stato necessario occuparsi, avrebbe come affogato le idee Geometriche, alle quali sole io doveva fissare la mente del mio Lettore.

ELE-

ELEMENTI
DI
GEOMETRIA.

PARTE PRIMA

De' mezzi, che ſi dovevano naturalmente impiegare per avere la miſura de' Terreni.



Uel, che pare, che debbano aver dovuto miſurare ſul principio, ſono le lunghezze, e le diſtanze. I.

Per miſurare una lunghezza qualun-

lunque, la Geometria naturale ci ſuggeriſce ſubito queſto eſpediente; di paragonar la lunghezza di una miſura conoſciuta a quella della lunghezza, che ſi vuol conoſcere.

II.

La linea retta è la linea più corta, che ſi poſſa tirare da un punto all' altro, e conſeguentemente la miſura della diſtanza tra due punti.

Quanto alla diſtanza, ſi vede, che per miſurare quella, che paſſa tra due punti, biſogna tirare una linea retta dall' uno all' altro punto, e sù queſta linea riportare la miſura conoſciuta: perchè tutte le altre linee facendo neceſſariamente un deviamento più, o meno grande, ſono più lunghe, che la linea retta, la qual non fa deviamento alcuno.

III.

TAVOLA Prima.

FIG. I.

Oltre le neceſſità di miſurare la diſtanza da un punto all' altro, accade ſpeſſo di dover miſurare la diſtanza da un punto ad una linea.

Per

Per esempio un uomo posto in D sulla riva di un fiume vuol sapere, quanto v'è dal luogo, dove egli sta, all'altra riva AB. E' chiaro, che in questo caso, per misurar la distanza cercata, bisogna prender la più corta di tutte le linee rette DA, DB &c., che si possón tirare dal punto D alla retta AB. Ov' è facile il vedere, come questa linea più corta, di cui si ha di bisogno, è la linea DC, che si suppone, non pendere nè verso A, nè verso B. Questa è dunque quella linea (chiamata perpendicolare) sulla quale bisogna riportare la nota misura per aver la distanza DC, dal punto D alla retta AB. Ma è pur manifesto, che per posar questa misura sulla linea DC, bisogna, che questa linea fosse prima tirata. Dunque

Una linea, che cade sopra un' altra senza pendere verso alcuna parte, o perpendicolare a questa linea.

que era neceſſario, che vi foſſe un metodo per tirar delle perpendicolari.

I V.

Vi era ancora biſogno di tirarne in un' altra infinità di occaſioni. Per eſempio, ſi sà, che la regolarità delle figure, quali ſono ABCD, FGHI, chiamate rettangoli, e compoſte di quattro lati perpendicolari tra loro, ſono quelle, che danno la forma alle caſe, alle lor parti interiori, a' giardini, alle camere, a' parati de' muri &c.

Fig. II. e III.

Il rettangolo è una figura di quattro lati tra loro perpendicolari.

La prima di queſte figure, cioè ABCD, che ha i quattro lati eguali, ſi chiama comunemente quadrato. L'altra FGHI, che non ha, che i lati oppoſti uguali, ritiene il nome di rettangolo.

Ed il quadrato è un rettangolo, che ha i quattro lati eguali.

V.

Nelle differenti operazioni, che diman-

dimandano, che ſi tirino delle perpendicolari, ſi tratta o di calarne ſopra una linea da un punto preſo al di fuori, o di alzarne da un punto poſto ſulla linea medeſima.

Se dal punto C, preſo nella linea AB, ſi voglia alzare la linea CD perpendicolare ad AB, biſognerà, che queſta linea non pendi nè verſo A, nè verſo B. FIG. IV. Maniera di alzare una perpendicolare.

Supponendo primieramente, che C ſtia in ugual diſtanza da A, e da B, e che la retta CD non penda da alcun lato, è chiaro, che ciaſcheduno de' punti di queſta linea ſarà egualmente diſtante da A, e da B. Non ſarà dunque neceſſario altro, che trovare un punto qualunque D tale, che la ſua diſtanza dal punto A ſia uguale alla ſua diſtanza dal punto B. Perchè allora tirando per C, e per queſto

ſto punto una linea retta CD, queſta linea ſarà la perpendicolare cercata.

Per avere il punto D, ſi potrà andar provando, e riprovando, e come cercandolo a tentone: ma queſta è una maniera, che non ſoddisfa punto, e ci vuole un metodo, che ſubito lo trovi. Eccolo:

Si prenda una comune miſura, per eſempio una corda, un compaſſo di una determinata apertura, ſecondo che l'operazione ſi farà o ſul terreno, o ſulla carta.

Preſa queſta miſura, ſi fiſſi al punto A o l'eſtremità della corda, o una punta del compaſſo, e facendo girare l'altra punta, o l'altra eſtremità della corda, ſi deſcriva l'arco PDM. Poi ſenza cangiar di miſura, ſi faccia l'iſteſſa operazione per rapporto al punto B, e ſi deſcriva l'arco QDN; il quale

quale col dividere il primo al punto D, darà il punto cercato.

Perchè appartenendo il punto D egualmente a' due archi PDM, QDN descritti per mezzo di una misura comune, la sua distanza dal punto A sarà uguale alla distanza dal punto B. Dunque CD non penderà nè verso A, nè verso B. Dunque questa linea sarà perpendicolare sopra AB.

Se 'l punto C non si trova ad ugual distanza da A, e da B, bisogna prendere due altri punti *a*, e *b* egualmente lontani da C, e servirsi di quelli in luogo di A, e di B, per descrivere gli archi PDM, QDN. FIG. V.

VI.

Se una di quelle tracce, come PDM, fosse stata continuata in O, in E, ed in R &c., finchè ella ritornasse al medesimo punto O, la traccia tutta intera FIG. IV. Il circolo è la traccia intera, che descrive la punta mobile d'un compas-

passo, mentre che gira intorno dell'altra punta.

tera si chiamerebbe circonferenza del circolo, o semplicemente circonferenza.

Se non si descrive, che la traccia di una parte PDM della circonferenza, questa parte si chiama arco del circolo.

Il centro è il luogo del punto fisso.

Il punto fisso A si chiama suo centro, o centro del circolo.

Il raggio è l'intervallo, col quale è aperto il compasso.

E l'intervallo AD il suo raggio.

Tutte le linee, come DAE, che passano pel centro A, e che sono terminate alla circonferenza, sono chiamate diametri. E' chiaro, che questa linea è il doppio del raggio: e per questo il raggio si chiama talora semidiametro.

Il diametro è doppio del raggio.

VII.

FIG. VI.

Maniera di calare una perpendicolare.

La maniera di alzare una perpendicolare sopra una linea AB, ci somministrata

miniſtra la maniera di calare una perpendicolare da qualunque punto E, preſo fuori di queſta linea. Perchè fiſſando in E o l'eſtremità del filo, o la punta del compaſſo, e con un medeſimo intervallo E *b*, ſegnando due punti *a*, e *b* ſulla linea AB, ſi cercherà, come nell'articolo precedente, un'altro punto D, il quale abbia l'iſteſſa diſtanza al punto *a*, e al punto *b*; e per queſto punto, e per E ſi tirerà la retta DE, la quale avendo ciaſcuna delle ſue eſtremità egualmente diſtante da *a*, e da *b*, e non pendendo più verſo l'uno di queſti punti, che verſo l'altro, ſarà perpendicolare ad AB.

VIII.

Dall'operazion precedente ſe ne ricava la ſoluzione di un nuovo Problema.

FIG. VII.

Dividere una linea in due parti uguali.

Se si tratta di dividere una linea retta AB in due parti uguali da' punti A, e B presi, come centri, e con una apertura di compasso qualunque, si descrivano gli archi REI, GEF da' medesimi centri; e colla medesima apertura, o con qualunque altra, che uno vorrà, si descrivano gli archi PDM, QDN; e la linea ED, la quale congiungerà i punti di intersezione E, e D, e dividerà AB in due parti uguali al punto C.

IX.

Trovata la maniera di tirare delle perpendicolari, è facilissimo il servirsene per descrivere quelle figure, che si chiamano rettangoli, e quadrati, delle quali si è parlato nell'Articolo IV. Si vede facilmente, che per fare un quadrato ABCD, di cui i lati sieno eguali a una linea data

FIG. II.

Dato un lato fare un quadrato.

data K, bisogna prendere sulla retta GE un intervallo AB eguale a K; poi a' punti A, e B alzare (Artic. v.) le perpendicolari AD, BC ciascuna eguale a K, e insieme tirare DC.

X.

Se vuole uno descrivere un rettangolo FGHI, di cui la lunghezza è K, e la larghezza L, farà FG uguale a K; e insieme alzerà le perpendicolari FI, GH ciascuna eguale a L, poi tirerà HI. FIG. III.

Fare un rettangolo, data la lunghezza, e larghezza.

X I.

Nel fare alcuni lavori, come parapetti, canali, strade &c. vi è di bisogno di tirare delle linee parallele; cioè a dire delle linee, di cui la posizione sia tale, che la loro distanza venga misurata per tutto da perpendicolari d'uguale lunghezza.

Or per menare queſte parallele il metodo più facile parmi quello, di cui ci ſiam ſerviti per deſcrivere i rettangoli. AB per eſempio ſia un lato o di canale, o di parapetto; e ſia la larghezza, che gli ſi vuol dare CA: o per proporre il queſito d'una maniera più Geometrica, e più generale, ſuppongaſi, che ſi voglia tirare per C la parallela CD ad AB; ſi prenderà, come uno vuole, un punto B nella linea AB, e ſi opererà in quella maniera medeſima, come ſe avendo la baſe AB, ſi voleſſe fare un rettangolo ABCD, che aveſſe AC per altezza. Così facendo le linee CD, AB prolungate all'infinito, ſaranno ſempre parallele; ovvero, quel che è l'iſteſſo, non ſi rincontreranno mai tra loro.

Fig. VIII.

Menare una parallela a una linea per un punto dato.

XII. La

XII.

La regolarità delle figure rettangole fa, che queſte vengono ſpeſſo in uſo, come abbiamo già detto, e talora v'è biſogno di conoſcere la loro grandezza. Per eſempio ſi ha da vedere, quanti parati vi vogliono per una camera; ovvero quante canne ha da contenere il recinto di una caſa, che la forma di rettangolo &c.

Per arrivare a ciò, ognun vede, che il mezzo più ſemplice, e più naturale è di ſervirſi di una comune miſura, la quale applicata più volte alla ſuperficie, che deve miſurarſi, tutta la ſcorra. Metodo, che torna a quel medeſimo, di cui ci ſiamo ſerviti per determinare la lunghezza delle linee.

Ora è evidente, che una miſura comu-

comune di ſuperficie deve pur ella eſſer ſuperficie; per eſempio quella d'una canna quadrata, di un piè quadrato &c., e così miſurare un rettangolo, e determinare il numero delle canne quadrate, ovvero de' piedi quadrati &c., che contiene la ſua ſuperficie.

Rechiamone, per ſollevare un po la mente, un'eſempio. Supponghiamo, che il rettangolo dato ABCD abbia 7. piedi di altezza sù una baſe di 8. piedi; Si potrà riguardare queſto rettangolo, come diviſo in ſette traverſe *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, *f*, *g*, delle quali ciaſcuna contenga 8. piedi quadrati; ſarà dunque il valore del rettangolo 7. volte 8. piedi quadrati; cioè 56. piedi quadrati.

FIG. IX.

Ora ſe uno riflette ai primi Elementi del calcolo Aritmetico, e che mol-

moltiplicare due numeri non è altro, che prendere uno di essi tante volte, quante unità sono contenute nell'altro; troverà, che vi corre una perfetta analogia tra la moltiplicazione ordinaria, e l'operazione fatta per misurare il rettangolo. Vedrà, che si determina la quantità delle canne quadrate, o piedi quadrati &c., che contiene la sua superficie, moltiplicando il numero delle canne, ovvero de' piedi &c., che dà la sua altezza, per lo numero delle canne, o de' piedi &c., che dà la sua base.

La misura di un rettangolo è il prodotto della sua altezza per la sua base.

XIII.

Le figure, che si hanno da misurare, non sono sempre regolari, come sono i rettangoli: contuttociò spesso occorre, che si debbano misurare; e talora determinare la stessa

ſa di un lavoro fatto sù un terreno, che è irregolare; talora ſapere, quante canne contiene una terra terminata irregolarmente. Era dunque neceſſario aggiungere al metodo di determinare la ſteſa de' rettangoli, quello di miſurare le figure, che non ſono tali.

Le figure rettilinee ſono quelle, che vengono terminate da linee rette.

Si vede in primo luogo, che per la pratica la difficoltà non conſiſte, che in miſurare le figure rettilinee tali, qual'è ABCDE: cioè a dire, figure terminate da linee rette. Perchè ſe nel contorno di un terreno ſi trova qualche linea curva, come nella figura ABCDEFG; egli è evidente, che queſte linee diviſe in altrettante parti, quante ne ſarà neceſſario di fare per evitare ogni errore ſenſibile, potranno conſiderarſi, come compoſte da linee rette.

FIG. II.

Ciò

Ciò ſuppoſto, malgrado l'infinita varietà di figure rettilinee, ſi poſſono tutte miſurare nell'iſteſſa maniera, dividendole in figure di tre lati, chiamati comunemente triangoli: per poter poi ciò fare nella maniera più ſemplice inſieme, e più comoda, da un punto qualunque A del contorno della figura ABCDE, ſi tirano le linee rette AC, AD &c. a' punti C, D &c.

Il triangolo è una figura terminata da tre linee rette.

XIV.

Non c'è dunque biſogno d'altro, che d'avere la miſura de' triangoli, che uno avrà formati. Or ſi sà, che per trovare ciò, che noi non ſappiamo, il mezzo più ſicuro è di cercare, ſe in ciò, che già ſi conoſce, vi è niente, che riferiſca a ciò, che vuolſi conoſcere: ma noi di già abbiamo veduto, che tutto il rettangolo ABCD è ugua-

è uguale al prodotto della ſua baſe AB nell'altezza CB. Quindi è facile il vedere, che queſta figura diviſa a traverſo per la linea AC, che ſi chiama diagonale, ſi trova partita in due triangoli uguali; e di lì s'inferiſce, che ciaſcuno di queſti triangoli ſarà uguale alla metà del prodotto della lor baſe AB, ovvero DC per la loro altezza CB, ovvero DA.

La diagonale d'un rettangolo è la linea, che lo divide in due triangoli uguali.

Egli è vero, che non ſempre avviene, che i triangoli, i quali ſi devono miſurare, abbiano due de' loro lati perpendicolari l'uno all'altro, come i triangoli ABC, ADC, i quali ſi chiamano triangoli rettangoli, ma queſto poco importa: potendoſi ſempre ridurre a triangoli di queſta ſorte.

I triangoli rettangoli ſono quelli, che hanno due de' loro lati perpendicolari l'uno all'altro. TAVOLA II. FIG. I.

Perchè dall'A, punta d'un triangolo qualunque ABC, ſi cali la perpendicolare AD ſulla baſe BC, il trian-

triangolo ABC ſi troverà partito in due triangoli rettangoli ABD, ADC.

Riprendendo ora il filo del diſcorſo, egli è evidente, che come li due triangoli ABD, ADC ſaranno la metà de' rettangoli AEBD, ADCF; così pure il triangolo propoſto ABC ſarà la metà del rettangolo EBCF, il quale avrà BC per baſe, e AD per altezza: ma la ſuperficie del rettangolo EBCF è uguale al prodotto dell' altezza EB, ovvero AD per la baſe BC; dunque il triangolo ABC avrà per miſura la metà pel prodotto della baſe BC per la perpendicolare AD, altezza del triangolo.

Un triangolo è la metà del rettangolo, che ha la medeſima baſe, e altezza.

Dunque la ſua miſura è la metà del prodotto dell' altezza per la ſua baſe.

Abbiamo dunque la maniera di miſurare tutti li terreni terminati dalle linee rette: poichè non ve n'è niuno, il quale non poſſa ridurſi a triangoli: e ſi può ſempre dalla ſommità

mità di queſti triangoli calare una perpendicolare alla baſe.

XV.

Dal metodo, che abbiamo dato per miſurare l'area, ovvero la ſuperficie de' triangoli coll'adoprare ſolo la loro baſe, e la loro altezza, ſenza avere verun riguardo alla lunghezza de' lati, ſi ricava queſta propoſizione, ovvero queſto teorema; che tutti i triangoli, come ECB, ACB, i quali hanno una baſe comune CB, e de' quali l'altezze EF, AD ſono uguali, hanno la medeſima ſuperficie.

Fig. II.

I triangoli di eguale altezza, e di egual baſe ſono ancora di egual ſuperficie.

XVI.

Per facilitare l'intelligenza del principio, che dà la miſura de' triangoli, noi abbiamo creduto non dover ſcieglière per baſe, ſe non un lato, sù cui potrebbe caſcare la perpendicolare calata dalla punta oppoſta; ciò,

ciò, che si può sempre fare, quando non si tratta, che di misurar terreni. Ma perchè nel confronto de' triangoli, che hanno la medesima base, le perpendicolari calate dalle lor sommità possono cascare fuori del triangolo, come nella figura 3. par, che sia necessario di vedere, se ne' triangoli tali, quale è BCG, succede il medesimo, che sieno sempre la metà dei rettangoli ECBF, i quali hanno la perpendicolare GH per altezza. Ma di questo è facile l'assicurarsi, avvertendo, che il triangolo CGH somma de' due triangoli CGB, GBH è la metà del rettangolo ECHG somma de' due rettangoli ECBF, FBHG; e così, che i due triangoli CGB, GBH, presi insieme sono la metà del rettangolo ECHG: or il triangolo GBH è la metà del rettangolo FBHG; FIG. II.

dunque il triangolo propoſto BCG è la metà dell'altro rettangolo ECBF, il quale ha BC per baſe, e GH per altezza.

XVII.

La propoſizione dimoſtrata ne' tre articoli precedenti può ancora generalmente proporſi in queſti termini: i triangoli EBC, ABC, GBC ſono eguali, allorchè eglino hanno una baſe comune BC, e ſono tra le medeſime parallele EAG, CBH, cioè a dire, allorchè le loro ſommità E, A, G ſi trovano in una medeſima linea retta EAG parallela alla retta CB. Perchè allora (Art. XI.) le loro altezze miſurate dalle perpendicolari EF, AD, GH ſono le medeſime.

Fig. IV.

I triangoli, che hanno la medeſima baſe, e ſono tra le medeſime parallele, ſono d'egual ſuperficie.

XVIII.

Tra le differenti figure rettilinee, che ſi poſſono miſurare col preceden-

te

te metodo, vi ſono alcune, che s'accoſtano alla regolarità de' rettangoli. Queſti ſono ſpazj tali, quale è ABCD, terminati da quattro lati, parallelo ognuno al lato oppoſto. Queſte figure ſono chiamate parallelogrammi, e ſono più facili a miſurarſi, che le altre figure rettilinee, eccetto i rettangoli. Perchè diviſo il parallelogrammo ABCD in due triangoli ABC, ACD, queſti due triangoli ſaranno, come ognun vede, uguali. Or come ciaſcuno di queſti triangoli è uguale alla metà del prodotto dell'altezza AF per la baſe BC, il parallelogrammo avrà per miſura il prodotto intiero della baſe BC per l'altezza AF.

Fig. V.

I parallelogrammi ſono figura di quattro lati, de' quali i due oppoſti ſono paralleli.

Si miſura moltiplicando l'altezza per la baſe.

XIX.

Da queſto ne ſegue, che tutti i parallelogrammi ABCD, EBCF, che

Fig. VI. e VII.

I parallelogrammi, che hanno la baſe comune, e ſono tra le medeſime parallele, ſono di egual ſuperficie.

hanno una baſe comune, e ſi trovano tra le medeſime parallele, ſono uguali tra loro: ciò, che è facile vedere ancora indipendentemente dal detto, oſſervando, che il parallelogrammo ABCD diverrà il parallelogrammo EBCF, ſe vi ſi aggiunge il triangolo DCF, e ſe dalla figura intiera ABCF ſi leva il triangolo ABE, perchè così, ſupponendo eſſere i due triangoli DCF, ABE uguali, è evidente, che il parallelogrammo ABCD non avrà mutato grandezza, diventando EBCF. Ora per aſſicurarſi dell'ugualità di que' due triangoli, baſterà oſſervare, che AB, e CD eſſendo parallele, come lo ſono BE, CF, il triangolo ABE non ſarà altro, che il triangolo DCF, il quale ſia ſi moſſo ſulla ſua baſe, in maniera, che il punto A ſia andato in D ed E in F.

XX. Vi

X X.

Vi è dell'altre figure rettilinee, che ſono facili a miſurarſi, e chiamanſi poligoni regolari, figure terminate da lati uguali, i quali hanno tutti la medeſima inclinazione, o pendenza gli uni agli altri. Tali ſono le figure ABDEF, ABDEFG, ABDEFGH. FIG. VIII. IX. e X.

Li poligoni regolari ſono figure terminate da lati uguali, e ugualmente inclinati gli uni agli altri.

Siccome abbiamo per coſtume di dare la forma di queſte figure alle vaſche, alle fontane, alle pubbliche piazze &c., credo, che ſia neceſſario, avanti d'inſegnare, come ſi miſurino, il dare la maniera di deſcriverla.

X X I.

Se uno, deſcritta una circonferenza di circolo, la divide in altrettante parti uguali, quanti lati vuol, che abbia il poligono, e inſieme tira le linee AB, BD, DE &c. per i punti A, B, D, E &c., che dividono la

Maniera di deſcrivere un poligono d'un numero determinato di lati.

Il pentagono ha 5. lati, l'esagono 6., l'eptagono 7., l'ottogono 8., l' enneagono 9., il decagono 10. &c.

circonferenza, avrà il poligono cercato, il quale chiamerà pentagono, esagono, eptagono, ottogono, enneagono, decagono &c. secondo, che egli avrà cinque, sei, sette, otto, nove, dieci &c. lati.

XXII.

Misura della superficie d'un poligono regolare.

Per aver la misura di un poligono regolare, si potrà impiegare il metodo di già dato (Artic. XIII.) per tutte le figure rettilinee. Ma facile è l'accorgersi, che il più corto è di dividere il poligono in triangoli uguali, i quali abbiano tutti il centro C per sommità. Perchè prendendo un di questi triangoli; per esempio CBD, e tirando sù la base BD la perpendicolare CK, la quale in tal caso si chiama l'apotema del poligono; siccome l'area del triangolo è uguale al prodotto della base BD

FIG. X.

L' apotema è la perpendicolare tirata dal centro della figura ad uno de' suoi lati.

per

per la metà di CK; queſto prodotto tante volte preſo, quanti ſono i lati del poligono, darà l'area di tutta la figura.

XXIII.

Il triangolo equilatero è quel, che ha tutti tre i lati uguali.

Se uno divide la circonferenza del circolo in tre parti uguali, formerà un triangolo chiamato equilatero. Se divide queſta circonferenza in quattro parti uguali, formerà un quadrato, ma queſte due figure le più ſemplici di tutti i poligoni poſſono facilmente deſcriverſi ſenza, che ſia neceſſario d'aver ricorſo alla diviſione del circolo: ciò, che s'è già veduto (Artic. IX.) nel quadrato. A riſguardo del triangolo equilatero egli è facile di vedere, che per deſcriverlo sù una baſe data AB e' biſogna, che da' punti A, e B come centri, e con un'apertura di compaſſo eguale

FIG. XI.

Maniera di deſcriverlo.

ad AB, si descrivano gli archi DCF, e GCH, e che da' punti A, e B tirino le linee AC, BC al punto C, sezione comune de' due archi DCF, GCH, e sommità del triangolo.

XXIV.

Potrei io quì al metodo di descrivere geometricamente il triangolo equilatero, e il quadrato, i primi di tutti i poligoni, aggiungere il metodo di descrivere geometricamente un pentagono, come più Autori han fatto negli elementi, che ci hanno dati. Ma perchè i principianti, per i quali soli noi quì lavoriamo, non potrebbero comprendere, che con fatica il filo, che deve seguir la mente, cercando la maniera di descrivere questa figura; ciò, che facilmente può fare l'Algebra, noi ci crediamo obbligati di rimettere la descrizione del

del pentagono al trattato, che seguirà dopo questo, e nel quale si metterà questa descrizione coll'altre di tutti i poligoni, i quali abbiano un maggior numero di lati, e che senza il soccorso dell'Algebra non potrebbero esser descritti geometricamente.

De' poligoni, i quali hanno più di cinque lati, e che io dico non potersi descrivere, che adoprando il calcolo algebraico, bisogna eccettuare quello di 6. lati, di 24., di 48. &c., e quelli di 8., di 16., di 32., di 64. &c., i quali si possono facilmente descrivere col metodo, che ci dà la Geometria Elementare, come si vedrà al fine di questa prima parte.

XXV.

Io ritorno alla misura de' terreni, e io ben vedo, che quelli, che si devono

vono misurare: che sono talvolta fatti in maniera, che non si possono mettere in pratica le operazioni descritte da' metodi precedenti.

Fig. XII. Io suppongo, che ABCDE sia la figura di un campo di un recinto &c., di cui si vuol la misura. Secondo quello, che si è veduto, bisognerà dividere ABCDE in tanti triangoli, come ABC, ACD, ADE: indi misurare questi triangoli dopo aver calate le perpendicolari EF, CH, BG. Ma se dentro lo spazio ABCDE si trovasse qualche ostacolo, come un rialto, un bosco, un lago &c., il quale impedisca, che non si possa tirar le linee, che sono necessarie, che si dovrà egli fare allora? qual metodo bisognerà seguitare per rimediare a questo incomodo, che reca il terreno? Quel, che si presenta subito alla

mente

mente, è di ſciegliere qualche terreno piano, ſul quale ſi poſſano fare facilmente quelle operazioni, e di deſcrivere sù queſto terreno de' triangoli eguali, e ſimili a' triagoli ABC, ACD &c. Vediamo, qual'artifizio ſi debba uſare per formare li nuovi triangoli.

XXVI.

Cominciamo dal ſupporre, che l'oſtacolo ſi trovi dentro il triangolo ABC, di cui ſieno noti i lati, e che ſi voglia delineare un triangolo eguale, e ſimile ſul terreno, che ſi è ſcelto per queſt' opera. In primo luogo ſi tirerà una linea DE uguale al lato AB, prendendo ancora una corda della lunghezza BC, e fiſſando una delle ſue eſtremità in E, ſi deſcriverà l'arco IFG, che avrà la corda per raggio, e per mezzo di un'altra corda

TAVOLA III. FIG. I.

Sapendo tre lati di un triangolo fare un altro triangolo a quello uguale

da preſa eguale ad AC, e di cui parimente ſi attaccherà un de' capi in D, ſi ſegnerà l'arco KFH, il quale dividerà l'altr'arco al punto F: tirando allora le linee DF, FE, ſi avrà un triangolo DEF uguale, e ſimile al triangolo propoſto ABC; ciò, che è evidente. Perchè i lati DF, ed EF, che ſi uniſcono al punto F, eſſendo eguali reſpettivamente a' lati AC, e BC, che concorrono inſieme al punto C, ed eſſendo preſa la baſe DE, uguale ad AE, non ſarebbe poſſibile, che la poſizione delle linee DF, ed EF sù DE foſſe differente dalla poſizione delle linee AC, e BC sù AB. E' vero, che ſi potrebbero prendere le linee DFE al diſotto di DE, ma il triangolo ſi troverebbe eſſere il medeſimo, e ſolamente ſarebbe roveſciato.

XXVII.

XXVII.

Se non si potesse misurare, che due soli lati del triangolo ABC, per esempio i lati AB, BC, egli è chiaro, che con questo solo non si potrebbe determinare un secondo triangolo uguale, e simile ad ABC. Perchè, ancorchè si fosse preso DE, uguale a BC, e DF, uguale a BA, non si saprebbe, qual posizione dare a questa quì, rispetto all'altra. Per togliere questa difficoltà, il ripiego, che si presenta, è facile. Si fa pendere DF nella medesima maniera sù DE, che AB pende sù BC, o secondo l'espressione Geometrica si dà all'angolo FDE la medesima apertura, che all'angolo ABC. Fig. III. e IV.

Un angolo è l'inclinazione d'una linea all'altra linea.

XXVIII.

Per fare questa operazione si prende un'istrumento, come *abc*, composto

Maniera di fare un angolo uguale ad un altro.

posto di due righe, che possano girare intorno a *b*, e si posano queste righe sù i lati AB, e BC. In questa maniera esse fanno tra loro l'angolo medesimo, che i lati AB, BC. Collocando dunque la riga *bc* sulla base DE in maniera, che il centro *b* risponda al punto D, e che l'istrumento resti sempre aperto a un modo, la riga *ab* darà la posizione della linea DF, la quale farà colla linea DE l'angolo FDE uguale all'angolo ABC. Ma la linea DF era stata presa della medesima lunghezza, che BA. Dunque non si dovrà fare altro, che tirare per F, e per E la retta FE, per avere il triangolo FED intieramente uguale, e simile al triangolo ABC.

Essendo dati due lati, e l'angolo da essi compreso, è determinato il triangolo.

Pratica semplicissima, che suppone questo principio evidente, che un triangolo è determinato per la lunghezza

ghezza de' ſuoi due lati, e per le loro aperture; ovvero quel, che torna al medeſimo, che un triangolo è uguale a un'altro, allorchè due de' ſuoi lati ſono reſpettivamente uguali, e che l'angolo compreſo tra queſti lati è ugualmente aperto.

XXIX.

Si potrebbe ancora fare l'angolo FDE uguale all'angolo ABC nella maniera ſeguente. Dal centro B, e da un'intervallo qualunque B *a* deſcrivete un'arco *a b c*. Così dal centro D, e dal medeſimo intervallo deſcrivete l'arco *e i f*: voi non dovrete allora far altro, che cercare un punto *f*, che ſia poſto ſull'arco *e i f* nella maniera medeſima, che *a* ſi troverà collocata ſull'arco *c b a*. Or voi troverete facilmente il punto *f*, ſervendovi della retta *a c*, che ſecondo la

Fig. V. e VI.

Seconda maniera di fare un angolo uguale ad un altro.

La corda di un arco di un circolo è la retta, che è terminata dalle due eſtremità dell'arco.

la definizione ordinaria si chiamerà la corda dell'arco *a b c*. Perchè se dal centro *e*, e da un' intervallo uguale ad *a c*, voi descrivete l'arco *l f k*, l' intersezione de' due archi *e i f*, *l f k*, vi darà il punto cercato *f*.

Così tirate per D, e per *f* la linea D *f* F, voi avrete l'angolo FDE, uguale all'angolo ABC. Ciò, che è evidente (Artic. XXVI.) poichè li triangoli B*ac*, D*fe* saranno affatto uguali, e simili in tutte le loro parti.

XXX.

Fig. III. e IV.

Due angoli ed un lato determinano il triangolo.

Quando si vuol fare il triangolo FDE uguale al triangolo ABC, se avviene, che non si possa misurare altro, che uno de' suoi lati, per esempio BC, si ricorre agli angoli ABC, ed ACB. Avendo fatto DE uguale a BC, si pongon le linee FD, e FE in

in modo, che facciano con DE li medeſimi angoli, che AB, ed AC fanno con BC. Allora col rincontro di queſte linee ſi ha il triangolo FDE uguale, e ſimile al triangolo ABC. Il principio, che ſuppone queſta operazione, è pure così ſemplice, che non ha biſogno di dimoſtrazione.

XXXI.

Se de' tre lati del triangolo ABC, non ſi può miſurare, che la baſe BC, e ſi ſa, che queſto triangolo è iſoſcele, cioè, che i due lati AB, ed AC ſono eguali, è evidente, che baſta miſurare uno de' due angoli ABC, ACB, perchè allora l'altro ſarà a quello uguale. Se ne vede facilmente la ragione, ſe uno ſa rappreſentarſi quel, che avverrebbe, ſupponendo, che i due lati AB, AC del triangolo ABC foſſero ſoprapoſti sù BD, e sù CE,

FIG. VII.

Il triangolo iſoſcele è quello, che ha due lati uguali.

linee nate dal prolungarsi la base BC, e che poi uno li alzasse per unirli al punto A, perchè allora l'ugualità di questi due lati farebbe, che in così unirsi, non farebbe uno più di cammino dell'altro. Dunque essendo così uniti, saranno egualmente inclinati verso la base BC. Dunque l'angolo ABC sarà uguale all'angolo ACB.

Gli angoli, che questi due lati fanno con la base, sono tra loro eguali.

XXXII.

Per tornare alla misura de' terreni, si vedrà, che qualunque sieno gli ostacoli, che si possano trovare nel di dentro di loro, e' sarà facile col metodo precedente di trasportare sù un terreno libero tutti li triangoli, i quali dividono lo spazio, che si vorrà misurare.

FIG. VIII. Supponghiamo per esempio, che voi vogliate misurare una selva di questa figura ABCDEFG. Primieramen-

ramente voi prenderete un triangolo eguale ad ABC, ciò, che potrete fare ſenza entrare nelle parti interne del triangolo, miſurando i due lati AB, BC, e l'angolo compreſo CBA.

Queſto triangolo così deſcritto darà l'angolo BCA, e la lunghezza di AC, e ſiccome voi potrete miſurare il lato eſteriore DC, voi avrete nel triangolo CAD i lati DC, e CA. Quanto all'angolo DCA, voi lo troverete, pigliando l'angolo IKL, uguale all'angolo DCB, e inſieme l'angolo LKO, uguale all'angolo BCA, e con ciò avrete l'angolo IKO uguale all'angolo cercato DCA. FIG. VIII. e IX.

Eſſendo così determinato il triangolo ADC da due lati DC, e CA, e dall'angolo DCA compreſo da' loro, voi conoſcerete nella medeſima

maniera il triangolo DAG, ed il rimanente della figura.

XXXIII.

Il metodo dato per misurare quei terreni, dentro li quali non si può operare col tirar delle linee, spesso incontra nella pratica grandissime difficoltà. Poche volte si trova uno spazio unito, e libero, assai grande per fare de' triangoli uguali a quelli del terreno, che si vuol misurare. E quando pure si trovi la gran lunghezza de' lati de' triangoli, può rendere le operazioni molto difficili: e difficile senza dubbio, e forse impossibile sarebbe calare, per esempio, una perpendicolare sù una linea da un punto, che è lontano 500. canne. E' necessario dunque l'avere un mezzo, che supplisca a queste operazioni.

TAVOLA IV. Questo mezzo si offerisce da se medesi-

deſimo, e ſubito viene in capo ad ognuno, il rappreſentare la figura ABCDE, che ſi ha da miſurare per una figura ſimile *abcde* più piccola, nella quale verbigrazia il lato *ab* ſia di 100. dita, ſe il lato AB è di 100. canne, il lato *bc* di 45. dita, ſe BC è di 45. canne, e così di conchiudere, che ſe la ſteſa della figura ridotta *abcde* è di 60000. dita quadrate, quella della figura ABCDE deve eſſere di 60000. canne quadrate. Fig. I. e II.

Ma prima di ogni altra coſa biſogna ſapere, in che conſiſte la moltitudine di due figure.

XXXIV.

Per poco, che un vi rifletta, riconoſcerà ſubito, che due figure ABCDE *abcde* per eſſere ſimili, devono eſſere tali, che gli angoli A, B, C, D, E, della grande ſieno ugua- In che conſiſte la ſimilitudine di due figure.

li agli angoli *a*, *b*, *c*, *d*, *e* della piccola, e di più, che i lati *ab*, *bc*, *cd* &c. della piccola contengono altrettante parti *p*, quante parti P contengono i lati AB, BC, CD &c. della grande.

XXXV.

Per esprimere questa seconda condizione i Geometri dicono, che è necessario, che i lati AB, BC, CD &c. sieno proporzionali a' lati *ab*, *bc*, *cd*, ovvero, che il lato AB contenga *ab*, nella maniera medesima, che BC contiene *bc* &c., ovvero, che il lato AB sia tanto grande rispetto ad *ab*, quanto l'è BC per rapporto a *bc* &c., o ancora che vi sia la stessa ragione, o rapporto tra AB, ed *ab*, che tra BC, e *bc* &c., o finalmente, che AB sia ad *ab*, come BC a *bc* &c. Tutte maniere da esprimere la medesima cosa, ma che bisogna rendersele famigliari,

gliari, per intendere la lingua de' Geometri.

XXXVI.

Maniera di descrivere una figura simile ad un'altra.

Dopo aver veduto, in che consiste la similitudine di due figure, cerchiamo, quale sia la maniera, che ci ha la natura stessa indicato per descrivere una figura simile ad un'altra. Rappresentiamoci uno, che disegna, e vuole così di grande in piccolo copiare una figura.

Primieramente prendendo *ab* per rappresentare la base AB della figura ABCDE, che ha da copiare, piega egli sù *ab* i lati *ae*, e *bc* nella medesima maniera, che AE, e BC sono piegati sopra AB, osservando, che le lunghezze di *ae*, e *bc* sieno a quelle di *ab*, come le lunghezze AE, e BC sono alla lunghezza AB; cioè a dire, che se per esempio AE è la me-

tà di AB, fa pure *ae* metà di *ab*; e nel modo medesimo determina la lunghezza di *bc* relativamente a BC.

Secondariamente, dopo aver così determinati i punti *e*, e *c*, e' tira due linee *cd*, e *cd*, che piega sopra *ea*, e sopra *cb*, nella medesima maniera, che ED, e CD sono piegate sopra EA, e sopra CB, e prolungando queste linee fino, ch' esse si rincontrano in *d*, e' finisce la sua figura *abcde*.

XXXVII.

Ora se uno considera questa costruzione, vedrà, che ella non è appoggiata, che sull' egualità, ch' è tra gli angoli E, A, B, C, e *e*, *a*, *b*, *c*, e sulla proporzionalità de' lati EA, AB, BC co' lati *ea*, *ab*, *bc*, e così si trova la figura compita, senza che si sia preso l'angolo *d*, eguale all'angolo D, ed i lati *cd*, *cd* proporzionali

nali a' lati ED, CD : Queſta conſiderazione potrebbe fare al primo temere, che l'angolo *d* non foſſe in effetto eguale all'angolo D, ed i lati *ed*, *cd* non foſſero proporzionali a' lati ED, CD, e conſeguentemente la figura *abcde* non ſi trovaſſe ſimile perfettamente alla figura ABCDE: ma queſto dubbio può ben toſto diſſiparlo l' eſperienza: oltrechè per poco, che uno uſi di attenzione, ſi accorge, che dall' egualità reſpettiva de' quattro angoli E, A, B, C, e *e*, *a*, *b*, *c*, e dalla proporzionalità dei tre lati EA, AB, BC, ed *ea*, *ab*, *bc*, riſulta neceſſariamente l' egualità degli angoli D, *d*, e la proporzionalità de' lati ED, CD, ed *ed*, *cd*.

Contuttociò per eſtinguere ogni ſoſpetto, facciamo vedere, che tutte le condizioni, che domanda la ſimili-

militudine delle figure, ſono neceſſariamente dipendenti l' une dall'altre; il che ci ſarà facile di fare, eſaminando li triangoli, che ſono figure le più ſemplici, e che devono aſſolutamente entrare nella compoſizione delle altre: e queſto eſame ci condurrà a tutte le proprietà, e a tutti gli uſi delle figure ſimili.

XXXVIII.

Fig. III. e IV.

Se due angoli di un triangolo ſono eguali a due angoli di un' altro triangolo, il terzo angolo dell'uno ſarà uguale al terzo dell'altro.

Supponghiamo, che ſulla baſe *ab* ſi coſtruiſca il triangolo *abc*, non prendendo, che gli angoli *cab*, *cba* uguali agli angoli CAB, CBA del triangolo ABC, primieramente è certo, che il terzo angolo *acb* ſarà uguale al terzo angolo ACB.

Perchè ſia collocato il triangolo *a b c* ſul triangolo A B C in modo, che 'l punto *a* ſi trovi ſul punto A, *ab* sù AB, *ac* sù AC, egli è chiaro, che

che *cb* sarà parallelo a CB. Imperocchè prolungato il lato *cb*, non potrà questo incontrarsi nel lato CB, che non pendano le due linee inegualmente sù AB, e per conseguenza, che gli angoli *cba*, e CBA sieno ineguali, ciò, che è contro la supposizione fatta.

Siccome dall' ugualità degli angoli *cba*, CBA ne segue, che le linee *cb*, CB sieno parallele; così dal parallelismo di queste linee ne seguirà, che gli angoli *acb*, ACB saranno uguali; quel, che si doveva provare.

XXXIX.

Due triangoli, che hanno i rispettivi angoli uguali, avranno ancora i lati proporzionali.

Facciamo ora vedere, che i lati corrispondenti ne' due triangoli *acb*, e ACB, i quali hanno i medesimi angoli, sono proporzionali.

Per fissar l'immaginazione, supponghiamo, che *ab* sia la metà di AB, bisognerà, che noi proviamo, che così

così pure *ac* ſarà la metà di AC, e *bc* la metà di BC. Avendo *acb*, ſecondo l'Articolo precedente, la poſizione di A*cb*, ſe uno tirà *cg* parallela ad AB, è chiaro, che queſta linea ſarà uguale a *b*B, ovvero ad A*b*, e che *g* B ſarà pure uguale a *cb*; ora come gli angoli *c g* C, e C *c g* ſono evidentemente uguali agli angoli *cb*A e *c*A *b*, il triangolo C*cg* ſarà uguale al triangolo *c* A *b* (Artic. xxx.), dunque ſi avrà C *c* uguale ad A *c*, e C*g* uguale a *c b*, ovvero a *g* B. Dunque A *c*, ovvero *a c* ſarà la metà di AC, e *c b* la metà di CB.

FIG. III. e V. Se *ab* foſſe la terza, o quarta parte, o qualſiſia altra di AB, e' ſarebbe egualmente facile di dimoſtrare, che *ac* pure ſarebbe il medeſimo numero di volte contenuta in A C, e *cb* in CB. Perchè da' punti di divi-

ſione

sione *b*, *f*, della baſe AB; tirando *bc*, *fh* &c. parallele a BC., ſi potrà porre lungo di AC tre, quattro &c. triangoli A*cb*, *chg*, *hCi* &c. eguali al triangolo *acb*.

Che ſe *ab* in luogo di eſſere contenuta eſattamente in un certo numero di volte in AB, non vi foſſe contenuta, che con qualche frazione, come per eſempio due volte, e mezza; ſi proverà, che *ac* ſarà così contenuta due volte, e mezza in AC, e *bc* due volte, e mezza in BC.

Perchè, dopo che per mezzo delle parallele *bc*, *fh*, ſi avrà collocato lungo di AC, i due triangoli A*cb*, *chg*, uguali ad *acb*, vi rimarrebbe tra le due parallele *hf*, e CB, come collocare un triangolo C*hi*, i lati del quale ſarebbero la metà de' lati di *c*A*b*: ciò, che è evidente; poichè per quel-

quello, che si è supposto, *f*B sarebbe la metà di A*b*, e la base *b i* del triangolo C*bi* sarebbe uguale a *f*B, a cagione delle parallele *b f*, CB. Dunque in generale, quando due triangoli ABC, *abc* hanno i medesimi angoli, questi triangoli, che si chiamano triangoli simili, hanno i loro lati proporzionali, o quel, che torna al medesimo, i lati AB, BC, AC d'uno di questi triangoli ABC contengono il medesimo numero di parti P, che i lati *ab*, *bc*, *ac* dell'altro triangolo *abc* contengono di parti *p*, essendo P il piede, la canna &c., ovvero in generale la scala, colla quale ABC è stato descritto, e *p* quella, che si è adoprata costruendo *abc*.

XL.

Dalla proposizione, che noi abbiamo dimostrato, si tira naturalmente

mente la ſoluzione di un problema ſpeſſo utile nella pratica.

Si dimanda, che una linea ſia diviſa in un numero dato di parti uguali. Queſto ſi potrebbe veramente ottenere a caſo, col provare, e riprovare tante volte, finchè uno s'imbatteſſe nella giuſta miſura: ma non mai ſi avrebbe con quella certezza, con cui lo dà la preciſion Geometrica. Dividere una linea in quante parti uguali uno vorrà.

Supponghiamo per eſempio, che ſi abbia a dividere AB in tre parti uguali; ſi comincia col tirare una linea indefinita AC, che faccia un'angolo qualunque con AB, e ſi pigliano sù queſta linea tre parti uguali A *c*, *c b*, *b* C, con una apertura di compaſſo preſa ad arbitrio, indi ſi tira CB, e medeſimamente le parallele *c h*, *b f* a queſta linea. Così AB diviſa a' punti *b*, e *f* ſi trova diviſa in FIG. V.

in tre parti uguali, ciò, che è chiaro per l'Articolo precedente.

XLI.

Cosa sia una linea quarta proporzionale a tre altre, e come si trovi.

Se si volesse dividere una linea in un tal numero di parti, che abbia de' rotti, come due, e mezzo, tre, e un quarto &c., ovvero se uno si proponesse in generale di dividere la linea AB a un punto *b*, in maniera, che AB sia ad A*b*, come la linea NO alla linea MQ, si vede subito, che la soluzione del problema dipenderebbe dall'Articolo XXXIX., cioè, che bisognerebbe tirare per A una retta qualunque; prendere sù questa A*c*, ed AC uguali a MQ, ed a NO, ed insieme tirare *cb* parallela a CB: ed allora il punto *b* sarà il punto cercato.

FIG. VI.

I Geometri enunciano questo problema così; trovare una linea quarta proporzionale a tre linee NO, MQ, AB.

XLII.

XLII.

Egli è evidente, che due triangoli ſimili ABC *abc* avranno non ſolamente i loro lati proporzionali; ma che le perpendicolari CF, e *cf*, che ſi caleranno dalla ſommità C, *c* ſulle baſi AB, *ab* ſeguiranno ancora le proporzioni de' lati: ciò, che è sì facile a dimoſtrare per ciò, che ſi è detto, che non dobbiamo quì punto fermarci, FIG. VII. VIII. Le altezze de' triangoli ſimili ſono proporzionali a' loro lati.

XLIII.

Quanto alle aree de' triangoli ſimili ABC, *abc*, ſi vede, che quella del primo conterrà altrettanti quadrati X fatti ſulla miſura P, quanti quadrati *x* l'area del ſecondo, fatti ſulla miſura *p*. Perchè, ſiccome per l'Articolo precedente, CF, ed AB avranno altrettante parti P, che *cf*, ed *ab* parti *p*; la metà del prodotto

di CF per AB, misura di ABC (Artic. XIV.) darà il medesimo numero, che quello, che risulterà dalla metà del prodotto *cf* per *ab* misura di *abc* con questa differenza, che CF, ed AB contandosi per via di parti P, il lor prodotto si conterrà per mezzo de' quadrati X: dovechè *cf*, ed *ab*, che si contano in parti *p*, daranno un prodotto, che si conterà in quadrati *x*.

XLIV.

Quello, che abbiamo detto sulla misura de' triangoli simili, serve di prova ad una proposizione, che negli Elementi di Geometria si suol proporre così. I triangoli simili ABC, *abc* sono tra loro, come i quadrati ABDE, *abde* de' loro lati omologhi, o corrispondenti AB, *ab*.

Le aree de' triangoli simili sono, come li quadrati de' lati omologhi.

La dimostrazione dell'Articolo preceden-

cedente conduce a queſta conſeguenza. Perchè il quadrato ABDE contenendo altrettanti quadrati X, quanti quadrati *x* contiene il quadrato *abde*; egli è evidente, che i due numeri de' quadrati X, che eſprimono il rapporto del triangolo ABC al quadrato ABDE, ſono i medeſimi, che i numeri de' quadrati *x*, che danno il rapporto del triangolo *abc* al quadrato *abde*, o quel, che torna al medeſimo, che il triangolo ABC è al quadrato ABDE, come il triangolo *abc* al quadrato *abde*.

Di là ne ſegue, che ſe per eſempio il lato AB era doppio del lato *ab*, il triangolo ACB ſarà quadruplo del triangolo *acb*: e che ſe AB era triplo di *ab*, il triangolo ACB ſarà nove volte maggiore del triangolo *acb* &c.; perchè AB non può eſſere doppia di

ab, che il quadrato ABDE non ſia quadruplo del quadrato *abde* &c.

XLV.

Fig. I. e II. *della medeſima Tavola.*

Ora per paſſare da' triangoli alle altre figure; ſupponghiamo, che a ciaſcuno de' triangoli ſimili ABD, *abd* ſi congiungano due altri triangoli ADE, e BDC, *ade*, e *bdc*, li due primi ſimili a queſti altri due; ſi vedrà, che nelle figure totali ABCDE, *abcde*.

Proprietà delle figure ſimili ricavate da quelle de' triangoli.

1. Gli angoli A, B, C, D, E, ſaranno i medeſimi, che gli angoli *a*, *b*, *c*, *d*, *e*; ciò, che è manifeſto; perchè gli uni, e gli altri ſaranno o angoli corriſpondenti de' triangoli ſimili, o angoli compoſti da queſti angoli corriſpondenti.

2. Si vedrà, che la relazione dei lati omologhi, o corriſpondenti DE, *de*, BC, *bc* &c. nelle figure ABCDE,

abcde

abcde sarà necessariamente la medesima, cioè, che se, per esempio, P entra un tal determinato numero di volte nella base AB, e *p* questo medesimo numero di volte in *a b*, P, e *p* entreranno le volte medesime ne' due lati omologhi qualunque DE, e *de*. Perchè per la similitudine dei triangoli ABD, *abd* la quantità di P, che conterrà AD, sarà uguale alla quantità di *p* contenuta in *a d*, e riguardando questi lati, come le basi de' triangoli simili ADE, *ade*, il numero delle parti P, che entrano in DE, sarà il medesimo, che delle parti *p* contenute nel lato *de*.

3. Si vedrà ancora, che se nelle due figure vi si tira delle linee, che sieno corrispondenti, come CE, *ce*, e le perpendicolari DF, *d f* &c., queste linee saranno sempre tra loro nel-

la medesima ragione, che i lati omologhi delle due figure.

Dunque le figure ABCDE, *abcde*, saranno interamente simili in tutte le loro parti.

XLVI.

Descritta così la figura *abcde*, perfettamente simile alla figura ABCDE egli è evidente, che se uno vuol di nuovo descrivere una figura del tutto uguale ad *abcde*, e per conseguenza ancora simile ad ABCDE, sarà inutile di misurare tutt' i lati, e tutti gli angoli di *abcde*, e basterà, per esempio, pigliare i tre lati *ab*, *ea*, *bc*, e li quattro angoli *e*, *a*, *b*, *c*, e con questo solo sarà uno sicuro di ricopiare la medesima figura *abcde*, simile ad ABCDE, quello, che forma una compita dimostrazione di ciò, che si è assunto altrove (Art. XXXVII.)

Ma

Ma si può ancora andar più lontano. Perchè è chiaro, che vi sarà sempre differenti modi di combinare quella quantità di angoli, e di linee, che si deve necessariamente misurare in una qualunque figura, per farne un altra, che le sia proporzionale. Sebbene sarebbe uno straccare il Lettore entrare in più esatto dettaglio.

XLVII.

Si può dimostrare con un ragionamento simile a quello dell'Articolo XLIII., che il numero de' quadrati X, che contiene la figura ABCDE, è il medesimo, che quello de' quadrati *x* contenuti nella figura *abcde*; e così le aree delle figure simili sono tra loro, come i quadrati de' loro lati omologhi.

Le aree delle figure simili sono tra loro, come i quadrati de' lati omologhi.

XLVIII.

Tutto quello, che abbiamo detto

Le figure ſimili non differenti, che per le ſcale, ſu cui ſono ſtate coſtruite.

delle figure ſimili, ſi può ridurre a queſto ſolo, ed unico principio; che le figure ſimili non ſono differenti tra loro, che ſecondo la ſcala, ſù cui ſono ſtate fatte.

XLIX.

Ora per meglio vedere l'uſo, che ſi deve fare de' triangoli ſimili, e delle riduzioni, per aver la miſura dei terreni, ſu'quali non ſi potrebbe comodamente operare, figuriamoci, che ABCDEF rappreſenti il recinto di un parco, di uno ſtagno &c., del quale ſi voglia determinare la ſteſa. Primieramente ſi miſurerà uno de'lati della figura, per eſempio, FE, e ſi vedrà, quanto avrà queſto lato di canne, o di pertiche &c.; e prendendo, che ſcala uno vorrà, ſi tirerà sù un cantone, o carta una linea *fe* uguale a tante parti della ſcala, quante perti-

TAVOLA V. FIG. I. e II.

pertiche, o canne conterrà FE: poi facendo gli angoli *def*, *dfe* uguali agli angoli DEF, DFE, si avrà il triangolo *edf*, nel quale si calerà *e g* perpendicolare sù *df*. Fatto ciò, e misurate per mezzo della scala le linee *df*, ed *eg*, si conchiuderà, che quante parti conterranno queste linee, altrettante pertiche, o canne &c. conterranno DF, ed EG. Così moltiplicando DF per la metà di EG, si avrà il valore del triangolo EDF; e misurando nell'istessa maniera gli altri triangoli DCF, BCF, ABF, si troverà determinata l'intera area della figura.

L.

Maniera di misurare la distanza di un luogo inaccessibile.

Accade spesso nella pratica, che bisogna misurare la distanza di un luogo F, dentro la quale o vi è qualche altro luogo, o qualche ostacolo impe-

impediſce, che non vi ſi poſſa la perſona accoſtare: nuovo problema, ma del quale già abbiamo dato anticipatamente la ſoluzione nell'Articolo precedente. Perchè non avendoſi per miſurare DF biſogno d'altro, che della ſimilitudine de' triangoli *def*, e DEF; egli è chiaro, che ſe uno miſura una qualunque baſe EF, e che da' punti F, ed E ſi poſſa avere il punto D, il problema ſarà riſoluto; cioè a dire, ſi avrà la diſtanza FD.

L I.

FIG. III. L'uſo, che ſi può fare degl' iſtrumenti particolari, come *b*Ac, di cui io ho già parlato (Artic. XXVIII.) compoſto di due regoli uniti al punto A, intorno al quale girano liberamente, ſoggiace ſpeſſo, e facilmente a degli sbagli. Ora l'apertura dell'angolo ſi altererà nel traſportarſi;

si; ora la forma, che uno è obbligato di dare all' istrumento per facilitarne l' uso, impedirà, che non possa venire applicata sul piano, ove dovrà farsi la riduzione.

Aggiungiamo a questo, che ciascheduu' angolo nuovo BAC, che in questa maniera si prende, richiede, che si trasporti di nuovo l' istrumento sulla carta; e l' unica via, che c'è, per paragonare tra loro due angoli, è di posare l' uno sopra l' altro, senza che per questo mezzo si possa aver giustamente il loro rapporto, o la loro grandezza assoluta.

LII.

Dunque era necessario di cercare una misura fissa per gli angoli, come già v'era per misurar le lunghezze: e questa fu facile a trovarsi. Perchè facendo restare fisso *Ab*, gli si ap- FIG. IV.

plichi

plichi il lato *Ac*, ed insieme si faccia questo girare intorno ad A: è chiaro, che se si pone all'estremità *c* del lato mobile *Ac* o una penna, o uno stile, in maniera da render sensibile la traccia del punto *c*; questa traccia, che formerà un'arco di circolo, darà l'esatta misura dell'angolo, per ciascuna apertura particolare de' lati *Ab*, *Ac*: cioè a dire, che a causa dell'uniformità della curvatura del circolo, succederà necessariamente, che a un'apertura dupla, tripla, quadrupla di *cAb* risponderà un'arco duplo, triplo, quadruplo di *cb*.

Un'angolo ha per misura l'arco di circolo compreso tra suoi lati.

LIII.

Supponendo dunque, che la circonferenza *bcdfg*, descritta dalla rivoluzione intera del punto *c*, sia divisa in un numero qualunque di parti uguali; il numero delle parti conte-

contenute dall'arco, che comprendono le linee A *c*, ed A *b*, misurerà esattamente l'apertura di queste linee, o l'angolo *c* A *b*, ch'esse formano.

I Geometri son convenuti di dividere il circolo in 360. parti, che si chiamano gradi, ciascun grado in 60. minuti, ciascun minuto in 60. secondi &c. Così un angolo *b*A*c*, per esempio, sarà di 70. gradi, 20. minuti, se l'arco *bc*, che gli servirà di misura, comprenderà 70. delle 360. parti del circolo, e di più 20. sessantesime parti di un grado.

Il circolo è diviso in 360. gradi; ciascun grado in 60. minuti &c.

LIV.

Di là ne segue, che un angolo CAB di 90. gradi, chiamato comunemente angolo retto, è quello, di cui i lati AC, e AB comprendono BC un quarto della circonferenza, e sono perpendicolari l'uno all'altro.

FIG. V.

L'angolo retto ha 90. gradi, ed i suoi lati sono perpendicolari l'un all'altro.

Si

L V.

L'angolo acuto è quel, che è minore del retto. FIG. VI.

Si chiama angolo acuto ogni angolo, che sia più piccolo di un angolo retto, cioè minore di 90. gradi. Tali sono gli angoli CAB, FAG, EAG.

L V I.

Un' angolo ottuso è quel, che è maggiore del retto.

Al contrario si chiama angolo ottuso quello, che ha più di 90. gradi, come FAB.

L V I I.

La somma degli angoli fatti dalla medesima parte su una retta, e che hanno il medesimo vertice, comprende 180. gradi.

Egli è evidente, che tutti gli angoli, come GAF, FAE, EAC, CAB, che si possono fare dalla medesima parte su una retta GB, e che hanno il medesimo vertice A, presi insime sono eguali a 180. gradi, ovvero a due angoli retti, misurati dalla metà della circonferenza.

L V I I I.

FIG. VII. Tutti gli angoli, che si possono fare in-

Così pure la somma di tutti gli angoli EAF, FAB, BAC, CAD, DAE, che

che si possono fare intorno ad un punto A, che serve loro di vertice comune, è uguale a 360. gradi, ovvero a quattro angoli retti misurati dalla circonferenza intera BCDEF.

intorno ad un medesimo punto presi insieme sono uguali a quattro retti.

LIX.

Dopo aver trovato, che gli angoli hanno le parti del circolo per misura, vediamo, come questa misura si prende, per vedere, quanti gradi contiene un'angolo, che si ha da misurare.

Si adopra un istrumento I, che si chiama semicircolo. Quest'istrumento è composto di due righe EAC, DAB, d'egual lunghezza, che si incrociano in A, e che hanno nelle loro estremità alcuni traguardi: una di queste righe EC è mobile intorno ad A, e l'altra DB è fissa, e serve di diametro al semicircolo DCB diviso in 180. gradi &c. FIG. VIII.

Vo-

Volendosi sapere l'angolo, che formano due linee rette tirate dal luogo, dove uno è, a due oggetti, qualunque F, G; si mette la riga fissa DAB in maniera, che l'occhio posto in D, veda uno de' due oggetti per i traguardi D, e B: nel medesimo tempo, senza muovere l'istrumento, si gira l'altra riga mobile, fino che l'occhio collocato in E, vede l'altro oggetto G per i traguardi E, e C; ed allora la riga mobile mostra sul semicircolo diviso in gradi, il numero de' gradi, minuti &c., che contiene l'angolo proposto GAF.

L X.

Uso di un istrumento per fare un'angolo di un numero determinato di gradi.

Se uno vuol fare sulla carta un angolo di un numero determinato di gradi, si adopra un istrumento K, diviso in 180. gradi, posando il centro A sulla punta dell'angolo, che si vuol se-

ſegnare, e la linea AB ſulla linea AG, che ſi prende per un de' lati dall' angolo, ſi nota il punto C, che corriſponde al numero de' gradi, che ſi vuol dare all' angolo propoſto; poichè per queſto punto, e pel centro A tirando la linea ACO, ſi avrà l'angolo OAG, che contiene il numero richieſto de' gradi.

LXI.

Supponghiamo ora, che avendo preſo una baſe FG ſulla carta, ſi voglia fare sù queſta baſe un triangolo FGH ſimile al triangolo ABC preſo sù un terreno; ſi metterà in uſo il ſemicircolo per ſapere, quanti gradi contiene ciaſcuno degli angoli CAB, CBA; e coll'altro iſtrumento ſi faranno gli angoli HFG, e HGF reſpettivamente uguali agli angoli CAB, e CBA: ed allora, perchè il punto H, TAVOLA VI. FIG. I. e II.

nel quale si unisconо i lati FH, e GH, sarà necessariamente con questa operazione determinato, e così pure l'angolo FHG, si avrà il triangolo FGH intieramente simile al triangolo ABC.

LXII.

Siccome importa moltissimo nella pratica, come abbiamo già detto, che gli angoli sieno esattamente misurati, non bisogna contentarsi di prenderli cogl' istrumenti ancor più perfetti, bisogna ancora trovare il mezzo di verificare le loro misure, per farne, se è necessario, la correzione. Or questo mezzo è semplice, e facile. Riprendiamo il triangolo ABC. Si vede subito, che la grandezza dell'angolo C deve risultare da quella degli angoli A, e B. Perchè secondo, che si accresceranno, o si sminuiranno questi angoli, can-

cangierà ancor la posizione delle linee AC, BC, e conseguentemente l'angolo C, che queste linee fanno tra loro. Ora se quest'angolo dipende dalla grandezza degli angoli A, e B, si deve presumere, che il numero de' gradi, che contengono gli angoli A, e B, deve determinare il numero de' gradi, che deve contenere l'angolo C; e così potrà servire a verificare le operazioni, che saranno state fatte per determinare gli angoli A, e B, se misurando insieme l'angolo C, vi si trova il numero de' gradi, che li convengono relativamente alla grandezza degli angoli A, e B.

Per trovare, come dalla grandezza degli angoli, A, e B, si può ricavare quella dell'angolo C, consideriamo quello, che avverrebbe a

queſt'angolo, ſe le linee AC, BC ſi
FIG.III. avvicinaſſero, ovvero ſi ſcoſtaſſero l'una dall'altra. Supponghiamo per eſempio, che BC girando intorno al punto B, ſi ſcoſtaſſe da AB per avvicinarſi a BE, egli è chiaro, che mentre BC gira intorno, l'angolo B continuamente và ſempre più slargandoſi; ed al contrario l'angolo C più, e più ſi ſerra, e diventa minore: quello, che potrebbe far preſumere, che in queſto caſo la diminuzione dell'angolo C, foſſe uguale all'accreſcimento dell'angolo B, e che così la ſomma de' tre angoli A, B, C foſſe ſempre la medeſima, in qualunque inclinazione delle linee AC, BC, ſopra la linea AE.

LXIII.

FIG.IV. Ora queſta induzione così preſunta porta con ſe la ſua dimoſtrazione. Per-

Perchè tirando ID, parallela ad AC, si vedrà primieramente, che gli angoli ACB, e CBD, chiamati alterni, sono uguali, ciò, che è evidente, poichè le linee AC, e IB essendo parallele, piegheranno egualmente sù CBO, e così l'angolo IBO, sarà uguale all'angolo ACB. Ma ancora l'angolo IBO sarà uguale all'angolo CBD: perchè la linea ID non piegherà più sù CO da un lato, che dall'altro. Dunque l'angolo DBC uguale all'angolo IBO, sarà uguale all'angolo ACB suo alterno.

Gli angoli alterni sono gli angoli opposti, che forma da una parte, e dall'altra una linea retta, che cade su due parallele.

Questi angoli sono uguali.

LXIV.

Si vedrà in secondo luogo, che l'angolo CAE sarà uguale all'angolo DBE, per causa delle parallele CA, e DB. Dunque li tre angoli del triangolo potrebbero essere messi tutti accanto, ed uniti al punto B,

ed allora si vedrebbe, che li tre angoli DBE, CBD, e CBA, che sono uguali a' tre angoli CAB, ACB, CBA, sono parimente uguali a due angoli retti (Art. LVI.) e come tutto questo, che abbiamo detto, potrà nella medesima maniera applicarsi a qualunque triangolo, sarà uno sicuro di quella proprietà generale, che la somma de' tre angoli di un triangolo è costantemente la medesima, e che è uguale a due retti, o quello, che dice lo stesso, a 180. gradi.

La somma de' tre angoli di un triangolo è uguale a due angoli retti.

LXV.

Dunque per avere il valore del terzo angolo di un triangolo, quando uno ne avrà misurati due, basterà sottrarre da 180. gradi quel numero di gradi, che i due angoli fanno insieme. Proprietà, che dà una maniera assai comoda di verificar la misu-

misura degli angoli di un triangolo; e da cui ne caveremo un' infinità di altre utilità di mano in mano, che anderemo innanzi. Noi quì ci contentiamo di tirare le conseguenze più immediate.

LXVI.

Un triangolo non può avere più d'un angolo retto, e per più forte ragione non potrà aver più d'un'angolo ottuso.

LXVII.

Se uno de' tre angoli di un triangolo è retto, la somma de' due altri angoli è sempre uguale a un retto.

Queste due proposizioni sono così chiare, che non hanno bisogno di dimostrazione.

LXVIII.

L'angolo esterno di un triangolo è uguale a' due angoli interni opposti.

Se si allunga uno de' lati del triangolo ABC, per esempio, il lato AB, l'an-

l'angolo esterno CBE sarà egli solo uguale a' due angoli interni opposti BCA, CAB. Perchè all'angolo CBA o si aggiungano li due angoli BCA, e CAB, o l'angolo CBE; la somma sarà sempre uguale a 180. gradi, cioè a due angoli retti (Art. LXIV.)

LXIX.

FIG. V. Saputo uno degli angoli di un triangolo isoscele ABC, si fanno gli altri due.

Un angolo del triangolo isoscele da gli altri due.

Se uno sa l'angolo al vertice A, sottraendo il numero de' gradi, che contiene questo, da 180., misura di tutti e tre gli angoli del triangolo, la metà della somma, che resterà, sarà la misura di ciascuno degli angoli B, C, alla base.

Se questo, che si sa, è uno di questi angoli B, C, il doppio del suo valore sottratto da 180. gradi darà l'angolo al vertice A.

LXX.

LXX.

Come un triangolo equilatero non è altro, che un triangolo iſoſcele, al quale può ciaſcuno de' ſuoi lati ſervir di baſe, ogni ſuo angolo è di 60. gradi, un terzo di 180.

Gli angoli di un triangolo equilatero ſono ciaſcuno di 60. gradi.

LXXI.

Di quì ſi ricava facilmente la deſcrizione dell'eſagono, o poligono di ſei lati, che noi abbiamo promeſſo (Art. XXIV.)

Deſcrizione dell'Eſagono.

Perchè per trovare una linea, che divide la circonferenza in ſei parti uguali, biſogna, che queſta linea ſia la corda di un'arco di 60. gradi, ſeſta parte di 360. valore della intera circonferenza. Supponendo dunque, che queſta corda ſia AB, e tirando dal centro I alle eſtremità A, e B, i raggi AI, e IB, l'angolo AIB ſarà di

FIG. VI.

di 60. gradi; e perchè i due lati AI, e IB ſaranno uguali, il triangolo AIB ſarà iſoſcele. Dunque l' angolo al vertice eſſendo di 60. gradi, ciaſcuno de' due altri angoli ſarà pure così di 60. gradi, la metà di 120. Dunque (Artic. LXX.) il triangolo AIB ſarà equilatero. Dunque AB ſarà uguale al raggio del circolo. Donde ne ſegue, che per deſcrivere un' eſagono, baſta aprire il compaſſo con un' intervallo uguale al raggio, e queſto applicare ſei volte in giro alla circonferenza, ed in queſto modo ſi avranno i ſei lati dell' eſagono.

LXXII.

Deſcritto l' eſagono ABCDEF, ſi deſcriverà facilmente il dodecagono, cioè il poligono di dodici lati.

Per

Per ciò fare, si dividerà l'arco AKB, ovvero l'angolo AIB in due parti uguali, ed AK corda della metà dell'arco AKB, sarà uno de' lati del dodecagono.

La metà dell'angolo al centro dell'esagono dà l'angolo al centro del dodecagono.

LXXIII.

Per dividere l'arco AKB in due archi uguali AK, e KB, si opererà nella medesima maniera, che si opera per dividere la corda AB in due parti uguali; cioè che da' punti A, e B, come centri, e con un'intervallo qualunque, si descrivono gli archi MLN, OLP, e pel punto L sezione dei due archi, e pel centro I, si tira la linea LI, la quale dividerà in due e l'arco AKB, e la corda AB.

Dividere un'angolo in due angoli uguali.

LXXIV.

Seguendo il metodo precedente,

Descrizione de' poligoni di 24.,48.&c. lati.

te, e dividendo l'arco AK in due archi uguali, la corda di uno di questi sarà il lato di un poligono di 24. lati. Così si avranno i poligoni di 48., 96., 192. &c. lati.

LXXV.

Descrizione dell' ottogono.

Per descrivere un' ottogono, cioè un poligono di otto lati, si comincierà dal fare un quadrato dentro il circolo. Questo si ha col tirare due diametri AIB, CIE, che si seghino ad angoli retti, e col congiugnere le loro estremità, tirando le linee AC, CB, BE, AE.

FIG. VII.

Perchè per la regolarità del circolo, e per l'egualità de' quattro angoli formati dalle perpendicolari AIB, CIE, i quattro lati AC, CB, BE, EA, saranno necessaria-

riamente uguali, e ſi troveranno egualmente inclinati l' uno verſo l' altro, ciò, che non può avvenire, che nel quadrato.

Deſcritto il quadrato, col metodo precedente ſi dividerà ciaſcun arco CKB, BLE &c. in due parti uguali: ciò che fatto, ſi avrà l' ottogono.

Se uno divide pure ciaſcun' arco CK, KB &c., in 2., in 4., in 8. &c. parti uguali, ſi avranno i poligoni di 16., 32., 64. &c. lati. E de' poligoni a 16., 32. &c. lati.



ELE-

ELEMENTI
DI
GEOMETRIA.

PARTE SECONDA.

Del metodo Geometrico di paragonare le figure rettilinee.



E uno ha fatto attenzione a quello, che abbiamo detto per moſtrare, come ſi è arrivato a miſurare i terreni, avrà ancora veduto, che le poſizioni delle linee tra loro ci ſomminiſtra-

niſtrano coſe degne di eſſere oſſerva-
te da ſe medeſime, indipendentemente
dall'utilità di quelle che ci poſſono eſ-
ſere nella pratica; e ſi può preſumere,
che queſte appunto foſſero quelle,
che impegnaſſero i primi Geometri
a portare più lontano le loro ſcoper-
te; non eſſendo ſolo il biſogno, e la
neceſſità, ma ſovente la curioſità an-
cora quella, la quale li ſpinge a fare
nuove, ed attente ricerche.

Di più deve aver contribuito al
progreſſo della Geometria il guſto,
che ſi ha naturalmente per queſta
preciſione rigoroſa, ſenza la quale
lo ſpirito non è mai ſoddisfatto.

E così allorchè miſurando le fi-
gure ſi ſono accorti, che in una in-
finità de' caſi le ſcale, ed i ſemicir-
coli non davano, che valori approſſi-
mati delle linee, o degli angoli, han-
no

no cercato metodi, che ſuppliſſero al difetto di queſt' iſtromenti.

Quì noi riprenderemo a conſiderare le figure rettilinee; ma nelle operazioni, che faremo per rinvenire i loro giuſti rapporti, non ci ſerviremo, che della riga, e del compaſſo.

Speſſo accade, che biſogna o unire in una figura più figure a lei ſimili, o riſolvere una figura in altre figure della medeſima ſpecie; ciò, che può farſi incominciando l'operazione ſu i rettangoli: poichè tutte le figure rettilinee non ſono, che aggregati di triangoli; e ciaſcun triangolo è la metà di un rettangolo, che ha la medeſima altezza, e la medeſima baſe.

I.

Per paragonare i rettangoli, biſogna

gna ſaper mutare un rettangolo qualunque in un' altro, che abbia la medeſima ſuperficie, ma una diverſa altezza. Perchè quando due rettangoli ſaranno mutati in due altri della medeſima altezza, non differiranno più che per le loro baſi; il più grande ſarà quello, che avrà la baſe maggiore, e conterrà il più piccolo nella maniera medeſima, che la ſua baſe contiene quella del rettangolo minore; ciò, che ſuole proporſi così. Due rettangoli, che hanno la medeſima altezza, ſono nella ragione medeſima delle loro baſi.

Due rettangoli, che hanno la medeſima altezza, ſono nella ragione medeſima delle loro baſi.

II.

Per aggiungere un rettangolo di queſti due all'altro, non biſogna far altro, che porne uno a lato all'altro.

III.

Così pure facilmente si sottrarrà il più piccolo dal più grande.

IV.

E per partire un rettangolo in un numero determinato di rettangoli uguali, basta dividere la sua base in un egual numero di parti uguali, e insieme alzare delle perpendicolari sù i punti delle divisioni.

V.

Tavol. VII. Fig. I.

Maniera di trasformare un rettangolo in un' altro, che abbia un'altezza data.

Sia ora proposto di trasformare il rettangolo ABCD in un'altro BFEG, che abbia la medesima superficie, e l'altezza BF. Si avvertirà, che, essendo il suo valore il prodotto della altezza per la base, è necessario, che il rettangolo cercato BFEG, l'altezza del quale sarà più grande di BC, abbia la sua base più piccola, che BA; cioè, che, se BF, per esempio, è dop-

pia

più di BC, bisogna, che BG non sia, che la metà di AB.

Se BF è il triplo di BC, BG non sarà, che il terzo di AB.

Si vedrà pure, che se BF in luogo di contenere BC esattamente un numero di volte, lo contenga con frazione; come due volte, e un terzo; il rettangolo BFEG non potrà essere eguale al rettangolo BACD, se la base BG non è contenuta due volte, e un terzo dalla base AB. E in generale sarà facile il vedere, che, affinchè due rettangoli ABCD, BFEG sieno eguali, bisogna, che le base BG di uno sia contenuta nella base AB dell'altro, come l'altezza BC nell'altezza BF.

E non si tratta più dunque di altro, che di dividere la linea AB in maniera, che AB sia a GB, come BF

a BC; quel, che si farà (1.Part.Artic. XLI.) tirando la linea FA, e dal punto dato C la parallela CG.

V I.

Secondo modo di trasformare un rettangolo in un'altro di data altezza. FIG. II.

Per cangiare il rettangolo ABCD in un' altro rettangolo BFEG, che abbia un' altezza data BF, si può usare un metodo meno naturale del precedente, ma più comodo. Avendo prolungato AD, fino a rincontrare in I la retta FEI, tirata pel punto F parallelamente ad AB, si tirerà la diagonale BI, e pel punto O, ove ella incontrerà il lato DC, si tirerà GOE parallela a FB, ed il rettangolo BFEG sarà uguale al rettangolo ABCD.

Per provarlo, basterà di far vedere, che levando da' rettangoli ABCD, BFEG la parte comune OCBG,

OCBG, il rettangolo ADOG uguaglierà il rettangolo EOCF.

Ora ſe uno fa attenzione all'uguaglità de' due triangoli IBF, IBA, vedrà, che ſottraendo da queſti triangoli quantità uguali, i reſidui ſaranno uguali. Ma il triangolo IAB diventerà il rettangolo ADOG, ſe uno ſottrae i tre triangoli IDO, OGB; Siccome il triangolo IBF diventerà il rettangolo EOCF, ſottraendone i triangoli IEO, OBC, eguali a'due primieri. Dunque i due rettangoli ADOG, EOCF reſidui de'due triangoli ſaranno eguali tra loro così bene, come i rettangoli ABCD, BFEG.

V I I.

Queſta ſeconda maniera di trasformare un rettangolo in un'altro, conferma il principio, che aveva la prima ſuppoſto, e che avrà potuto

Si dimoſtra rigorosamente, che ſe due rettangoli ſono eguali, la baſe del primo è alla baſe del ſecondo co-

come l'altezza del secondo all' altezza del primo.

ſembrare non eſſere appoggiato. che sù una ſemplice induzione.

Dall' egualità di due rettangoli ABCD, BFEG ſi era concluſo, che e' biſognava, che AB foſſe a BG, come BF a BC; ciò, che ſi può ora provare per l'Articolo precedente.

Perchè eſſendo evidentemente ſimili i triangoli IAB, e OGB, la baſe AB del grande ſarà alla baſe GB del piccolo, come l'altezza IA all'altezza OG, o come BF a BC a loro uguali. Dunque AB ſarà a GB, come BF a BC, conforme al principio dell'Articolo V.

VIII.

Colla maniera medeſima, colla quale ſi dimoſtra, che dall'eſſere eguali due rettangoli ABCD, BFEG, ne ſegue, che l'altezza BF è all'altezza BC, come la baſe AB alla

baſe

baſe BG, ſi dimoſtra pure, che, quando quattro linee BF, BC, AB, BG ſono tali, che la prima è alla ſeconda, come la terza alla quarta; il rettangolo, che ha per altezza, e per baſe la prima, e la quarta di queſte linee, è uguale al rettangolo, che ha per altezza, e per baſe la ſeconda, e la terza.

Se di quattro linee la prima è alla ſeconda, come la terza alla quarta, il rettangolo formato per la prima, e per la quarta ſarà uguale al formato dalla ſeconda, e dalla terza.

I X.

Quando quattro quantità, ſono come le linee predette BF, BC, AB, BG, tali, che la prima è alla ſeconda, come la terza alla quarta, ſi dice, che queſte quattro quantità ſono in proporzione, o che formano una proporzione. Così 6, 9, 18, 27, ſono in proporzione; perchè 6 è contenuto tante volte in 9, quante 18 in 27. Così pure 15, 25, 75, 125 &c.

Quattro quantità, delle quali la prima ſia alla ſeconda, come la terza alla quarta, ſi dicono formare una proporzione.

X.

De' quattro termini di una proporzione il primo, ed il quarto sono chiamati estremi; si chiamano medi il secondo, ed il terzo.

La prima, e la quarta delle quattro quantità di una proporzione si chiamano *termini estremi*, o semplicemente *estremi*; la seconda, e la terza si chiamano *termini medi*, o semplicemente *medi*.

Servendosi delle precedenti definizioni, le proposizioni degli Articoli VII., e VIII., si proporranno così.

X I.

In una proporzione il prodotto degli estremi è uguale al prodotto de' medi.

Di quattro quantità proporzionali il prodotto degli estremi è uguale al prodotto de' medi.

X I I.

Se il prodotto degli estremi è uguale al prodotto de' medi, que' quattro termini formano una proporzione.

Se quattro quantità sono tali, che il prodotto degli estremi sia uguale al prodotto de' medi, queste quattro quantità saranno proporzionali.

XIII. Si

XIII.

Si devono ben notare gli Articoli precedenti; perchè sono di grandissimo uso. Tra le altre cose se ne ricava la dimostrazione della regola, che in Aritmetica si suol dire la *regola del tre*. Per dare un' idea di questa regola, noi ne porgeremo un' esempio; essendo questa la maniera più semplice di farsi intendere. Quindi si ricava la regola del tre.

Supponghiamo, che 24. lavoratori abbiano fatto trenta canne di lavoro in un determinato tempo, si dimanda, quanto ne faranno 64. lavoratori in un tempo eguale.

E' evidente, che per sciogliere il quesito bisogna trovare un numero, che sia a 64. nella ragione medesima, che 30. è a 24.. Or secondo quello, che abbiamo veduto, questo nu-

numero sarà tale, che il suo prodotto per 24. uguaglierà il prodotto di 30. per 64. Ma il prodotto di 30. per 64. è 1920. Dunque il numero cercato sarà quello, che moltiplicato per 24. darà 1920. Per poco, che uno abbia d'idea delle operazioni dell'Aritmetica, facilmente si accorgerà esser necessario, che questo numero sia il quoziente della divisione di 1920. per 24., cioè a dire 80.

Quale sia la maniera di trovare il quarto termine di una proporzione, dati i tre primi.

In generale per trovare il quarto termine di una proporzione, di cui sieno dati i tre primi, bisogna prendere il prodotto del secondo, e del terzo, e dividere questo prodotto pel primo termine della proporzione.

XIV.

Un esempio così facile, come è quel-

quello, che abbiamo ſcelto, non darà forſe a divedere la neceſſità del metodo precedente. Il ſolo naturale accorgimento può far trovare il numero cercato. Si vede, che 30. avanza 24. di un quarto, e che così biſogna, che il numero cercato avanzi pure di un quarto il 64., e queſto dà 80. Ma vi è de' caſi, ne' quali più difficilmente ſi troverebbe la ragione, che hanno i due primi termini della proporzione.

Per eſempio, ſi cerca un quarto proporzionale a queſti tre numeri 259., 407., 483.

Per trovarlo ſecondo il metodo precedente, ſi moltiplica 483. per 407., e ſi divide 196581., che n'è il prodotto per 259., quello, che dà 759., per quarto termine cercato.

In

In altra maniera non si sarebbe potuto trovare questo termine, che a tastone. Si sarebbe ben potuto trovare, per esempio, che 148., eccesso di 407. sù 259. contiene quattro settime parti di 259., e che così era pur necessario di aggiungere a 483. il numero 276., che contiene quattro delle sue settime parti. Ma la generalità, e sicurezza del metodo precedente ci libera dall' imbarazzo del provare, e riprovare ciò, che ancora non basta in molti casi.

XV.

Quando si dovrà aggiungere due quadrati, si farà la loro addizione nella medesima maniera, che si fa quella di due rettangoli: essendo i quadrati rettangoli, che hanno l' altezza uguale alla base. Si trasformerà

merà dunque uno de' quadrati il più piccolo, per eſempio, in un rettangolo, che abbia il lato del grande per altezza, e li due quadrati non ſaranno, che un rettangolo. Si potrà pur dare l'altezza del piccolo quadrato a tutti due, ovvero un'altra altezza ad arbitrio: quello, che non ſi può quaſi laſciar di fare, allorchè ſi vuole così ridurre due quadrati in una figura, è, di fare un quadrato uguale a due altri: problema, di cui ſi trova facilmente queſta ſoluzione.

XVI.

FIG. III. Fare un quadrato doppio di un altro.

Supponghiamo, che i due quadrati ABCD, CBFE, de' quali ſe ne vuol fare un ſolo quadrato, ſieno uguali fra loro; è facile l'avvertire, che ſe uno tira le diagonali AC, e CF, i triangoli ABC, e CBF

CBF faranno insieme il valore di un quadrato. Dunque trasportando sopra AF i due altri triangoli DCA, e DEF, si farà il quadrato ACFG, di cui il lato AC sarà la diagonale del quadrato ABCD, e di cui la superficie uguaglierà quella de' due quadrati proposti: ciò, che non ha bisogno di dimostrazione.

XVII.

FIG. VI.

Fare un quadrato eguale a due altri presi insieme.

Supponghiamo ora, che si voglia fare un quadrato uguale alla somma de' due quadrati disuguali ADC*d*, CFE*f*, o quel, che è lo stesso, che uno voglia trasformare la figura ADFE*fd* in un quadrato.

Seguitando il metodo precedente, si cercherà, se è possibile, di trovare nella linea DF qualche punto H, tale che

1. Tirando le linee AH, e HE, e fa-

e facendo girare i triangoli ADH, EFH attorno i punti A, ed E, finchè avendo le posizioni A*dh*, E*fh*, questi due triangoli si congiungano in *h*.

2. Che i quattro lati AH, HE, E*h*, *h*A sieno eguali, e perpendicolari gli uni agli altri.

Or questo punto H si troverà facendo DH uguale al lato CF, ovvero EF. Perchè dall' essersi supposta eguale DH a CF, ne segue primieramente, che se uno fa girare ADH attorno al suo angolo A, dimodochè abbia la posizione A*dh*, il punto H arrivato in *h*, sarà distante dal punto C un' intervallo uguale a DF.

Da questo essersi supposti eguali DH, e CF, ne segue ancora, che HF sarà uguale a DC, e così il trian-

piccolo lato del medesimo triangolo ADH, e che il quadrato AHE*b* uguale agli altri due è descritto sul lato maggiore AH, che si nomina comunemente l'ipotenusa del triangolo rettangolo, si scorgerà tosto questa famosa proprietà de' triangoli rettangoli; che il quadrato dell'ipotenusa è uguale alla somma de' quadrati fatti sù gli altri due lati.

L'ipotenusa d'un triangolo rettangolo è il suo lato maggiore.

E il quadrato di questo lato è uguale alla somma de' quadrati fatti su gli altri due.

XIX.

Dunque allorchè di due quadrati HDKL, ABCD se ne vorrà fare un solo, sarà inutile di metterli al lato uno all'altro, e di discomporli, come s'è fatto nell'Articolo XVII. Basterà di collocare i loro lati AD, DH in modo, che facciano un'angolo retto, e tirare la linea AH: poichè allora questa linea sarà il lato del quadrato cercato AHIE.

FIG. V. e VI.

Di dove si tira una maniera semplice di ridurre due quadrati a un solo.

FIG. VII.

XX. Se

XX.

Se uno di due figure ſimili DAFGM, DHPON, ne voglia fare una terza uguale in ſuperficie a tutte due, baſta porre le baſi AD, HD di queſte figure sù i due lati di un'angolo retto ADH, e l'ipotenuſa AH del triangolo ADH ſarà la baſe della figura cercata. FIG. VIII. IX. FIG. X.

Se i lati di un triangolo rettangolo ſervon di baſe a tre figure ſimili, la figura fatta sù l'ipotenuſa uguaglierà le due altre inſieme.

Per vederne la ragione, ſi figurino i quadrati ABCD, DHKL, AHIE fatti ſulle baſi delle tre figure ſimili, ſi vedrà ſubito, per l'Articolo XVIII., che il quadrato AHIE varrà egli ſolo i due altri quadrati ABCD, DHKL. Ora le figure ſimili ſono tra loro, come i quadrati de' loro lati omologhi (Part. 1. Artic. XLVII.): Dunque tre quadrati ABCD, DHKL, AHIE avranno le

medeſime parti delle figure DAFGM DHPON, AHQRS.

Donde ſarà facile il conchiudere, che la figura AHQRS ſarà uguale alle altre due. Supponghiamo, per eſempio, che ciaſcuno di queſti quadrati ſia la metà della figura, dentro la quale è compreſo, neſſuno dubiterà, che la figura AHQRS non ſia eguale alle altre due, poichè la ſua metà ſola è uguale alla metà delle due figure DHPON, DAFGM. Il medeſimo ſuccederebbe, ſe i quadrati ABCD, DHKL, AHIE foſſero due terzi, tre quarti &c. delle figure DAFGM, DHPON, AHQRS.

XXI.

Ridurre più figure ſimili ad una ſola

Se uno vuole unire in una ſomma tre, quattro &c. figure ſimili, o quello, che è lo ſteſſo, tre, quattro &c. quadrati, il metodo ſarà ſempre

pre il medeſimo. Se uno voleſſe, per eſempio, aggiungerne tre, ſi faccia un quadrato uguale a' due primi; e a queſto nuovo quadrato ſi aggiungerà il terzo; e così ſi avrà un quadrato uguale a tre quadrati propoſti.

XXII.

Da quì ſi ricava, che ſe uno vuol fare un quadrato cinque, ſei &c. volte più grande di un' altro, baſta, che ſegua il metodo precedente per riſolvere queſto problema, ed il problema inverſo, cioè di fare un quadrato, che ſia la quinta, la ſeſta &c. parte di un quadrato propoſto: richiedendoſi ſolo, che uno ſi ricordi della maniera data per trovare una quarta proporzionale a tre linee date. Nella terza Parte di queſt'opera noi daremo un metodo più diretto,

e più comodo per ſciogliere queſta ſorte di problemi.

XXIII.

L'addizione delle figure ſimili ci ſomminiſtra una prova deciſiva della neceſſità di abbandonare le ſcale, quando ſi vòglia fare l'operazioni di una maniera, che ſi poſſa rigoroſamente dimoſtrare.

Supponghiamo, per eſempio, che ſi abbia a fare un quadrato doppio di un'altro. Quelli, che non ſapranno il metodo dato nell'Articolo XVI., probabilmente ſi atterranno alla ſeguente maniera.

Divideranno il lato di un quadrato dato in un gran numero di parti; per eſempio, in 100. Moltiplicheranno 100. per 100., e troveranno 10000. pel valore del quadra-

drato; ciò, che darà 20000. per valore di quello, che si domanda.

Ma dal valore di questo non ne ricaveranno la maniera di descriverlo. E' necessario, che abbiano il suo lato espresso per un numero; e che questo numero sia tale, che moltiplicato per se medesimo, cioè a dire, avendolo quadrato, il prodotto dia 20000.

Il prodotto, che risulta dalla moltiplicazione di un numero per se medesimo, è il quadrato di questo numero.

Or vano sarebbe il cercare questo numero, di cui ci è bisogno in una scala, le parti della quale sieno centesime del lato del quadrato dato. Perchè 141. moltiplicato per se medesimo darà 19881., e 142. darà 20164.; e però questi numeri sono lontani da quello, che si dovrebbe trovare.

Potrebbe forse uno darsi a credere, che dividendo il lato del qua-

drato dato in più di 100. parti, troverà un numero determinato di queste parti per un lato del quadrato, che sia doppio del primo. Ma qualunque prova, che egli faccia, troverà sempre di aver cercato indarno due numeri, de' quali uno esprima il lato, ovvero, per parlare col linguaggio ordinario, la radice di un quadrato doppio dell'altro.

La radice di un quadrato è il numero, che moltiplicato per se stesso dà il quadrato.

XXIV.

Di fatti si dimostra in Aritmetica, che se due numeri non sono moltiplicati uno per l'altro; cioè, se uno non contiene l'altro un numero determinato di volte, il quadrato del più grande non sarà nè pure multiplo del quadrato del più piccolo. Così, per esempio, 5. non potendosi dividere esattamente per 4., il suo qua-

Un numero è multiplo di un' altro, quando lo contiene per l'appunto più volte.

quadrato 25. non potrà nè pure dividerſi per 16. quadrato di 4.

Dunque ſe uno farà il quadrato di due numeri, del quale uno ſia più grande dell'altro, ma ſia meno, che 'l doppio, avrà per queſta operazione due altri numeri, de' quali uno ſarà minore del quadruplo dell'altro, ma ſenza poterne eſſere nè il doppio, nè il triplo. Dunque ſe uno divide il lato di un quadrato in qual numero di parti vorrà, il lato del quadrato duplo, che, ſecondo quello, che ſi è dimoſtrato nell'Articolo XVI., ſarà la diagonale di queſto quadrato, non conterrà un numero divolto per l'appunto di queſte parti: ciò, che nel linguaggio Geometrico, ſi dice; che il lato del quadrato, e la ſua diagonale ſono incommenſurabili.

Il lato di un quadrato, e la ſua diagonale ſono incommenſurabili.

XXV. Si

XXV.

Si può di più oſſervare, che vi ha una quantità di altre linee, che non hanno alcuna comune miſura.

Perchè ſe uno ſcrive le due ſerie

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 &c.

1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81 &c.,

la prima delle quali eſprima i numeri naturali, e l'altra i loro quadrati, ſi vedrà, che come li numeri, che ſono tra 4., e 9., tra 9., e 16., tra 16., e 25. &c., non hanno alcuna radice, così i lati di due quadrati, de' quali l'uno ſia o triplo, o quintuplo, o ſeſtuplo &c. dell'altro, ſono incommenſurabili tra loro.

XXVI.

Dall'eſſere alcune linee incommenſurabili riſpetto ad altre linee, forſe ſoſpetterà qualcheduno dell'eſattezza delle propoſizioni, di cui ci

ſia-

ſiamo ſerviti a provare la proporzionalità delle figure ſimili. Perchè paragonando queſte figure (1. Part. Art. XXXIV., e ſeg.) noi abbiamo ſempre ſuppoſto una ſcala, che poſſa egualmente ſervire a miſurare tutte le loro parti: ſuppoſizione, che ſembrerà ora dovere eſſere limitata a cauſa di quel, che abbiamo detto. Biſogna dunque, che noi ci rifacciamo ſulle noſtre ſteſſe pedate, e che eſaminiamo, ſe le noſtre propoſizioni per eſſere vere, abbiamo biſogno di qualche modificazione.

XXVII.

Cominciamo da quel, che ſi è detto nell'Articolo XXXIX. della prima Parte, e vediamo, ſe è eſattamente vero, che li triangoli, come *abc*, ABC, gli angoli de' quali ſono gl'iſteſſi, abbiano i loro lati FIG. XI. e XII.

pro-

proporzionali. Supponghiamo, per esempio, che essendo la base del primo *ab*, quella del secondo sia una retta AB uguale alla diagonale di un quadrato, del quale *ab* sia il lato, e cerchiamo, se in questa supposizione, la ragione di AC ad *ac* sarà la medesima, che quella di AB ad *ab*.

Ancorchè, secondo quello, che abbiamo veduto, per quanto grande, che possa essere il numero delle parti, che si suppongono arbitrariamente in *ab*, AB non possa contenere un numero per appunto di queste parti; contuttociò facilmente uno si accorgerà, che più questo numero sarà grande, e più AB si approssimerà ad essere esattamente misurata dalle parti di *ab*. Supponghiamo *ab* divisa in 100. parti; quello, che AB conterrà di queste parti, si trove-

troverà tra 141., e 142. (Art. XXIII.) Contentiamoci di 141., e traſcuriamo il piccolo reſiduo. E' chiaro (1. Part. Artic. XXXIX.) che AC pure conterrà 141. di parti di *ac*.

Supponghiamo *ab* diviſa in 1000. parti; quello, che AB conterrà delle parti di *ab*, ſarà tra 1414., e 1415. Prendiamo 1414., e traſcuriamo il reſiduo. Si troverà medeſimamente, che AC conterrà 1414. di milleſime parti di *ac*, e che in generale AC conterrà ſempre altrettante parti di *ac* con un reſiduo, che AB conterrà di parti di *ab* con un reſiduo.

In oltre queſti reſidui, come noi abbiamo oſſervato, ſaranno dall'una, e l'altra parte tanto più piccoli, quanto il numero delle parti di *ab* ſarà grande. Dunque ſarà permeſſo di traſcurarla, ſe uno s'immagi-

na

na la divisione di *ab* portata all' infinito. Dunque si potrà dire allora, che il numero delle parti di *ac*, che contiene AC, sarà uguale al numero delle parti di *ab*, che conterrà AB, e che così AC sarà ad *ac*, come AB ad *a b*.

I triangoli, e le figure simili hanno i loro lati proporzionali, ancora quando i lati sono incommensurabili.

Dunque noi abbiamo rigorosamente dimostrato, che allora quando due triangoli hanno li medesimi angoli, hanno ancora i loro lati proporzionali, o abbiano i lati, o non abbiano una comune misura.

La proposizione (1.Part.Art.XLV.) donde si è tirata la proporzionalità delle linee, che si corrispondono nelle figure simili, si giustificherà nel modo medesimo.

XXVIII.

Col mezzo di simili ragionamenti si vedrà, che le proposizioni spiegate

gate negli Articoli XLIV., e XLVII. della prima Parte, nelle quali si è mostrato, che le aree de' triangoli, e delle figure simili hanno tra loro la proporzione medesima, che i quadrati de' lati omologhi, sono in generale sempre vere; ancora quando i lati di queste figure sono incommensurabili.

E queste figure, sono sempre tra loro, come i quadrati de' loro lati omologhi.

Prendiamo, per esempio, li triangoli simili ABC, *abc*, de' quali noi supponghiamo le altezze incommensurabili colle loro basi. In questo caso, non vi sarà alcun quadrato, per quanto sia piccolo, che possa servire di misura comune a questi triangoli, ed a' quadrati fatti sulle loro basi; cioè a dire, che le aree *abc*, ed *abde* saranno incommensurabili tra loro, così come le aree ABC, ed ABDE; ma non sarà meno

no vero, che il triangolo ABC ſia al quadrato ABDE, come il triangolo *abc*, al quadrato *abde*.

Di queſto uno ſi aſſicurerà oſſervando, che più le parti della ſcala, di cui uno ſi ſervirà per miſurare AB, e CK, ſaranno ſuppoſte piccole, e più uno ſi avvicinerà ad avere li numeri, che eſprimano il rapporto di ABC, ad ABDE. Dunque dividendo ſempre la ſcala del triangolo *abc* nel medeſimo numero di parti, e traſcurando i reſidui, ſi vedrà, che i medeſimi numeri ſerviranno ſempre ad eſprimere il rapporto del triangolo ABC al quadrato ABDE, e quello del triangolo *abc* al quadrato *abde*. Che ſe uno porta col penſiero la diviſione della ſcala fino all' infinito, i reſidui diventeranno aſſolutamente nulli; e

ſi

ſi potrà dire, che i numeri, i quali eſprimeranno il rapporto del triangolo *abc* al quadrato *abde*, eſprimeranno pure il rapporto del triangolo ABC al quadrato ABDE, e che così il triangolo *abc* ſarà al quadrato *abde*, come il triangolo ABC al quadrato ABDE.

Il medeſimo ſarà di tutte le figure ſimili.

ELEMENTI
DI
GEOMETRIA.

PARTE TERZA.

Della misura delle figure circolari, e delle loro proprietà.



Dopo di essere arrivati a misurare tutte le sorti di figure rettilinee, hanno i nostri antichi voluto aver la maniera di determinare quelle, che finiscono in linee curve. Li terreni, ed in generale gli spazj, de' qua-

de' quali si cerca la misura, non sono sempre terminati per linee rette.

Spesso le figure curvilinee, e le figure miste, cioè quelle, che sono terminate da linee rette, e da linee curve si possono ridurre a figure tutte rettilinee, come di già abbiamo detto. Perchè se si abbia a misurare una figura tale, come ABCDEFG, TAVOLA VIII. si potrà prendere il lato AD per una FIG. I. unione di due, di tre &c. linee rette, sostituendo perciò la linea FD dalla curva FED, si avrà la figura rettilinea ABCDFG, la quale sì poco differisce dalla figura mista, che una senza errore sensibile potrà pigliarsi per l'altra.

Si opererà dunque sù queste figure, seguendo i metodi precedenti. Ma i Geometri non rimarranno sodisfatti di questa sorte di operazioni:

ni: essi non vogliono, che operazioni rigorose. Di più vi sarà caso, nel quale la trasformazione di una figura curvilinea, o mista in una figura tutta rettilinea richiedeva, che il suo contorno si divida in un così gran numero di parti, che il metodo comune riuscirà impraticabile. Così non deve uno curarsi di seguirlo, se si debba misurare uno spazio, come Z (Fig. 7.), ovvero l'intiero circolo X (Fig. 3.). Bisognerà allora prendere un'altra strada per trovare la misura di questa sorte di spazj. Quì noi non parleremo, che di quelli, il contorno de' quali contiene solo archi di circolo.

I.

Fig. III. Supponghiamo dunque, che s'abbia a misurare l'area del circolo X. Si osserverà, che iscrivendoli un poligo-

ligono regolare BCDE &c. più lati avrà queſto poligono, e più ſi approſſimerà al circolo. Ora ſi è veduto, che l'area di queſta figura (1. Part. Artic. XXII.) è uguale altrettante di volte al prodotto del lato BC, per la metà dell'apotema AH, quanti ha di lati il poligono, o quello, che è l'iſteſſo, che queſt'area ha per miſura il prodotto del contorno intiero BCDE &c. per la metà dell'apotema. Dunque, poichè andando fino all'infinito, il numero de' lati del poligono, la ſua area, il ſuo contorno, il ſuo apotema uguaglieranno l'area, il contorno, il raggio del circolo, la miſura del circolo ſarà il prodotto della ſua circonferenza per la metà del ſuo raggio.

La miſura del circolo è il prodotto della ſua circonferenza per la metà del ſuo raggio.

II.

Da queſto ne ſegue, che la ſuperficie di un circolo BCD è uguale a

Fig. IV.

L'area del circolo è uguale a un triangolo, del quale l'altezza è uguale al raggio, e la base una retta eguale alla circonferenza

quella di un triangolo ABL, del quale l'altezza sia il raggio AB, e la base una retta BL, eguale alla circonferenza.

III.

E non si tratta dunque, che di avere il raggio, e la circonferenza. In quanto al raggio è facile di misurarlo: non così della circonferenza. Contuttociò per averne la misura, si può mettere attorno al circolo un filo, ciò, che in molte occasioni basta per la pratica.

Ma fin ad ora non si è potuto arrivare a misurare geometricamente la circonferenza del circolo, cioè a dire, a misurare esattamente la ragione, che essa ha al raggio. Si trova questa ragione alle centomillesime, ed alle millionesime, e per approssi-

proſſimazione quanto uno vuole, ſenza che ſi poſſa però determinarla rigoroſamente.

IV.

L'approſſimazione più ſemplice, che ſi ſia trovata, è quella di Archimede. Diviſo il diametro in ſette punti, quello, che la circonferenza contiene di queſte parti, è tra le 21., e le 22.: e ſi ſa, che è più vicino alle 22., che alle 21.

Se il diamètro del circolo ſi divida in 7. parti, la circonferenza ne ha preſſo a 22. di queſte parti.

V.

Del reſto egli è chiaro, che ſe ſi ſapeſſe eſattamente la ragione di una ſola circonferenza al ſuo raggio, ſi ſaprebbe quella di tutte le altre circonferenze a' loro raggi; dovendo queſta ragione eſſere la medeſima in tutti i circoli: propoſizione, la quale appariſce sì chiara, che non ha biſogno di eſſere dimoſtrata; poichè ſi

Le circonferenze de' circoli ſono trà loro, come i loro raggi.

vede, che tutte quelle operazioni, le quali uno avrà fatte per misurare una circonferenza, servendosi delle parti del suo raggio, dovrà replicare per misurare ogni altra circonferenza; e che così si troverà il medesimo numero di parti del suo raggio.

VI.

Egli è evidente, che i circoli hanno la proprietà generale di tutte le figure simili (1. Part. Artic. XLVII.) voglio dire, che le loro superficie sono nella medesima proporzione, che i quadrati de'loro lati omologhi: ma siccome per applicare questa proposizione a'circoli, non si potrà prendere i loro lati, bisognerà servirsi de'raggi; e si vedrà, che i circoli avranno le loro aree proporzionali a'quadrati de'loro raggi.

Le aree de' circoli sono proporzionali a'quadrati de' loro raggi.

Se non compariſſe subito, che que-

sta

ſta propoſizione deve ſeguire dal detto nell'Articolo XLVII. della prima Parte, e ſi voleſſe una dimoſtrazione particolare, ſi farà attenzione, che tornerà aſſolutamente al medeſimo di comparare le aree de' due circoli BCD, EFG, ovvero quelle de' triangoli ABL, AEM, che ſaranno loro eguali (Artic. 11.) ſupponendo, che le loro baſi BL, e EM, ſieno le circonferenze BCD, EFG ſvoltolate, e che le loro altezze ſieno i raggi AB, ed AE. Ora per l'articolo precedente queſti triangoli ſaranno ſimili: dunque le loro aree ſaranno nella medeſima proporzione, che li quadrati de' loro lati omologhi AB, AE, raggi de' circoli BCD, ed EFG. Dunque &c. FIG. IV. e V.

VII.

I circoli a cagione della loro ſimilitu-

litudine, nella medeſima maniera; che le figure ſimili, avranno queſta proprietà, che ſe prendendo i tre lati di un triangolo rettangolo per raggi, ſi deſcriveranno tre circoli, quello, del quale il raggio ſarà l'ipotenuſa, uguaglierà i due altri preſi inſieme.

Di tre circoli, che abbiano per raggio i lati di un triangolo rettangolo, quello, che dà l'ipotenuſa, è uguale agli altri due inſieme.

Così ſi potrà ſempre trovare un circolo uguale a due circoli dati, e queſto ſenza la fatica di miſurare ciaſcuno di queſti circoli. Se uno vuole, per eſempio, fare una vaſca, la quale contenga tanto di acqua, che due altre, avendo la medeſima profondità, ſe ſi voglia trovare l'apertura di un condotto di fontana, per il quale ſcorra tant'acqua, quanta per due altri dati, ſi otterrà ſubito facilmente col mezzo dato.

VIII. Se

VIII.

Se si abbia a misurare la superficie di una corona V, figura compresa tra due circoli concentrici EFG, BCD, cioè tra due circoli, che hanno un centro comune, quello, che subito si presenterà, sarà di misurare separatamente la superficie di due circoli, e di sottrarre la più piccola dalla più grande. Ma egli è facile l'accorgersi, che il problema si può risolvere di una maniera più comoda per la pratica.

FIG. VI. Una corona è lo spazio compreso tra due circoli concentrici.

Immaginiamoci un triangolo ABL, che ha il raggio AB per altezza, e di cui la base sia una retta BL uguale alla circonferenza BCD. Se uno tira pel punto E la retta EM parallela a BL, questa retta sarà uguale alla circonferenza EFG. Perchè a cagione della similitudine de' triangoli

goli AEM, ABL, vi avrà la medesima proporzione tra AB, e BL, che tra AE, ed EM. Ora per l'ipotesi BL sarà uguale alla circonferenza, di cui AB è il raggio. Dunque EM uguaglierà la circonferenza, che avrà per raggio la linea AE parte di AB. Il medesimo avverrà di ogni altra linea KI parallela a BL. Sarà sempre eguale alla circonferenza, della quale il raggio sia AK.

Dall'ugualità supposta trà la circonferenza EFG, e la' retta EM ne segue necessariamente l'egualità del triangolo AEM al circolo EFG. Dunque necessariamente lo spazio rettilineo EBLM sarà uguale all'anello proposto V. A questo spazio EBLM si può facilmente cangiare in un rettangolo EBPH, dividendo ML in due parti uguali MI, e IL, e tirando

do a BL pel punto I la perpendicolare HIP, che darà il triangolo aggiunto MHI uguale al triangolo ſottratto PLI.

Dunque ſe pel punto I ſi tira a BL, la parallela IK, che dividerà EB in due parti uguali, l'anello propoſto eguale allo ſpazio EBLM, ovvero a EBPH avrà per miſura il prodotto EB per KI, circonferenza, di cui AK ſarà il raggio.

Per miſurare un'anello, ſi deve moltiplicare la larghezza per la circonferenza media.

Dunque per miſurare l'anello V, biſogna moltiplicare la ſua larghezza EB per la circonferenza KOQ detta media tra le circonferenze BCD, EFG, perchè ella ſorpaſſa la piccola circonferenza EFG, ovvero la retta EM d'una quantità MH uguale a PL, quantità, di cui è ella ſuperata dalla maggior circonferenza BCD, ovvero dalla retta BL.

IX. Se

IX.

Se si tratterà di misurare una figura Y composta di archi di circoli differenti, e di linee rette, ovvero una figura Z unicamente composta di archi di circolo, tutta la difficoltà si ridurrà a misurare i segmenti del circolo, cioè spazj, come ABCE terminati da un' arco ABC, e dalla corda AC. Perchè le figure intieramente composte d'archi di circolo, ovvero d'archi, e di linee rette, possono tutte esser considerate, come figure rettilinee accresciute, o diminuite da alcuni segmenti.

Fig. II. Fig. VII. Il segmento di circolo è uno spazio terminato dall' arco, e dalla corda. Fig. VIII.

La misura di tutte le figure circolari si riduce a quella del segmento.

X.

La misura di un segmento qualunque ABCE è facile a trovare, allorchè si sa quella del circolo. Perchè tirando le linee AT, CT al centro T dell'arco, si formerà una figu-

Fig VIII

figura ABCT chiamata ſettore, di cui l'area ſarà al circolo, come l'arco ABC all'intiera circonferenza, e che per conſeguenza avrà per miſura il prodotto della metà del raggio AT per l'arco ABC. Reſtando determinato il ſettore, non ſi dovrà fare altro, che ſottrarre il triangolo ACT per avere il ſegmento ABCE.

Il ſettore è una porzione di circolo terminata da due raggi, e dall'arco, che quelli comprendono.

Sua miſura è quella del ſegmento.

X I.

Siccome ſpeſſo accade, che dovendo miſurare una figura, come Y, non ſi ha il centro dell'arco HIK, e che ſenza queſto centro non ſapeſſe uno miſurar la figura, poichè il metodo precedente eſigge di conoſcere il raggio, e' biſogna, che noi cerchiamo il centro di un'arco di circolo qualunque. FIG. I.

Sia ABC l'arco del circolo propoſto; ſe uno prende ad arbitrio due pun-

Trovare il centro di un arco di circolo qualunque.

Fig. 15. punti A, e B sù quest'arco, e da questi punti, come centri, descrive i quattro archi *goi*, *foh*, *lpk*, *mpn*, i due primi da un raggio qualunque, e li due altri o dal medesimo raggio, o da tal'altro, che li piacerà; è chiaro, che il centro cercato dell'arco ABC sarà sulla linea *op*, che congiunge i punti d'intersezione *o*, *p*.

Sciegliendo di più un terzo punto C sull'arco ABC, e servendosi di B, e di C della medesima maniera, di cui uno si è servito di A, e di B, si avrà una retta *qr*, sulla quale dovrà ancora trovarsi il centro domandato. Dunque questo centro sarà il punto T, dove s'incontrano le linee *o p*, *q r*.

XII.

Così in qualunque sito uno ponga tre punti, purchè non li metta in una

una linea retta; si potranno sempre congiungere con un'arco di circolo; o quello, che è l'istesso, qualunque sia la ragione de' lati AC, BC, di FIG. X. un triangolo ACB colla sua base, si potrà sempre circoscrivere un circolo a questo triangolo.

XIII.

Il metodo dato per circoscrivere un circolo a un triangolo applicato successivamente a diversi triangoli ACB, AEB, AHB, più, o meno alti rispetto alla loro base AB, mostrerà, che passando da un triangolo ACB, il quale ha l'angolo al vertice molto acuto, ad altri triangoli AEB, AGB, che hanno l'angolo al vertice più aperto; il centro del circolo circoscritto continuamente si approssimerà ad AB, e che questo centro passa in appresso sotto ad AB, FIG. XI.

allorchè l'angolo al vertice AGB ha una certa apertura. Or vedendo paſſar queſto centro al diſotto di AB, dopo averlo veduto di ſopra, deve, come io credo, venir voglia di cercare, di quale ſpecie è il triangolo AFB, quando il circolo circoſcritto ha il ſuo centro ſulla ſteſſa AB.

FIG. XII.

Per conoſcere queſto triangolo AFB, ſi comincierà dal notare, che in queſto caſo particolare, la porzione del circolo circoſcritto al triangolo deve eſſere un ſemicircolo per l'appunto. E di fatti trovandoſi il centro del detto circolo ſulla baſe AB, le eſtremità della quale ſono, ſecondo l'ipoteſi, nella circonferenza, il centro M dovrà eſſere preciſamente ſituato a mezzo di AB, in maniera, che AB ſarà neceſſariamente un diametro.

Si

Si vedrà ancora, che da qualunque punto F del ſemicircolo uno tirerà le linee FA, FB, l'angolo AFB ſarà retto. Perchè tirando FM, i due triangoli AFM, MFB ſaranno iſoſceli: dunque li due angoli AFM, MFB ſaranno reſpettivamente uguali agli angoli FAM, FBM, o quello, che torna allo ſteſſo, l'angolo totale AFB uguaglierà la ſomma de' due angoli FAM, FBM: ma li tre angoli AFB, FAM, FBM preſi inſieme ſono uguali a due retti: dunque l'angolo AFB ſarà retto.

Se da un punto qualunque della circonferenza di un ſemicircolo ſi tireranno due rette alla eſtremità del diametro, ſi avrà un angolo retto.

Così ſe uno deſcrive ſulla baſe AB un triangolo rettangolo qualunque, queſto triangolo avrà la proprietà richieſta di eſſere iſcritto in un circolo, il centro del quale è ſulla baſe.

XIV.

Queſta proprietà del circolo, che l'angolo, che ha il vertice nella ſua ſemicirconferenza, e la baſe ſul diametro, ſia ſempre un retto, porta a cercare, ſe le altre parti del circolo abbiano qualche proprietà analoga; ſe, per eſempio, gli angoli ACB, AEB, AFB, preſi in un ſegmento ACEFG, ſaranno uguali tra loro, come lo ſono quelli del ſemicircolo.

TAVOL. IX. FIG. I.

Per aſſicurarcene, noi comincieremo dal ricevere il valore di uno di queſti angoli; e vedremo pure degli altri, ſe hanno il medeſimo valore. Prendiamo, per eſempio, l'angolo AEB, la di cui ſommità E è poſta a mezzo l'arco AEB. Siccome la linea EDG, che paſſa pel centro D, divide queſt'angolo in due parti uguali, baſterà di miſurare l'an-

FIG. II.

l'angolo AEG ſua metà, o quello, che è lo ſpazio, baſterà ſapere, che parte è l'angolo AEG di un'angolo già miſurato, come ADG. Io dico, che l'angolo ADG è già miſurato; perchè noi ſappiamo, che l'arco AG è la miſura (1. Part. Artic. LII.).

Se uno oſſerva, che il triangolo AED è iſoſcele, vedrà facilmente, che l'angolo AEG è la metà dell'angolo ADG. Perchè gli angoli AED, EAD (1. Part. Artic. XXXI.) ſono uguali. Ma (1. Part. Art. LXVIII.) queſti due angoli preſi inſieme ſono uguali all'angolo eſterno ADG. Dunque l'angolo AED, ovvero AEG è la metà dell'angolo ADG.

Per la medeſima ragione l'angolo DEB ſarà la metà dell'angolo GDB. Dunque l'angolo totale AEB

sarà uguale alla metà dell' angolo ADB. Dunque la sua misura sarà la metà dell' arco AGB.

X V.

Misurato l'angolo AEB, per sapere, se è uguale a ciascuno degli altri angoli, che hanno il loro vertice, o sommità nel medesimo segmento, bisogna esaminare, se uno di questi angoli preso ad arbitrio, per esempio AFB, è egli pure la metà dell' angolo al centro ADB. Uno se ne assicurerà facilmente, tirando la retta FDG pel centro. Perchè allora si vedrà, che l'angolo AFB sarà composto di due altri AFD, DFB, che saranno per l' articolo precedente metà degli angoli ADG, GDB: donde si concluderà, che l'angolo totale AFB, sarà la metà dell' angolo ADB. Ed applicando

FIG. III.

Tutti gli angoli, che hanno il vertice alla circonferenza, e che sono fondati sul medesimo arco, sono eguali, ed hanno per comun misura la metà dell' arco, sul quale sono piantati.

cando queſto diſcorſo a tutti gli angoli ACB, AEB, AFB, i quali hanno il loro vertice alla circonferenza, e che poſano ſul medeſimo arco AGB, FIG. I. ſi potrà concludere, che queſti angoli ſono tra loro uguali, come l'abbiamo congetturato nell'articolo precedente.

XVI.

Tra li diverſi angoli, i quali hanno la loro ſommità nell'arco ACEFB, ve ne ha di quelli, i quali potrebbero comparire non compreſi nella dimoſtrazione precedente. Queſti ſono angoli, come AFB, cioè tali, FIG. IV. che la retta FDG tirata pel centro paſſa fuori dell'angolo ADB. Contuttociò notando ſempre, che l'angolo DFA è la metà dell'angolo GDA, e l'angolo DFB, la metà dell'angolo GDB, ſi vedrà, che

l'angolo AFB, quello, per cui l'angolo DFB eccede l'angolo DFA, ſarà in queſto caſo la metà dell'angolo A D B, eccesſo dell' angolo GDB ſopra a GDA.

XVII.

Secondo le figure, delle quali ci ſiamo fin'ora ſerviti, ſembrerà, che la dimoſtrazione precedente non convenga, che a i ſegmenti più grandi di un ſemicircolo; ma è facile il vedere, che un'angolo qualunque, come AFB, che avrà il ſuo vertice in un ſegmento più piccolo di un ſemicircolo, ſarà ſempre compoſto di due altri DFB, DFA, metà degli angoli BDG, ADG, e per conſeguenza, che queſt'angolo AFB avrà per miſura la metà de' due archi BG, AG, cioè a dire la metà dell'arco AGB.

FIG. V.

XVIII.

XVIII.

Dopo di aver veduto, che in un medeſimo ſegmento gli angoli AEB, AFB, AHB, che abbiamo ſuppoſto eſſere alla circonferenza, ſono tutti eguali, ſi è tentato di trovare, che ne ſia dell'angolo AQB, allorchè la ſua ſommità ſi confonde col punto B, eſtremità della baſe AB; ſvaniſce egli allora queſt'angolo? Ma non pare poſſibile, che venga tutto di un colpo ad annientarſi, ſenza riſtringerſi grado per grado: e non ſi vede, quale ſarà il punto, di là dal quale queſt'angolo laſcierà di eſiſtere: come dunque arriveremo noi a trovarne la miſura? Queſta è una difficoltà, che non ſi può riſolvere, ſenza ricorrere alla Geometria dell' infinito, del quale tutti gli uomini hanno almeno una idea imperfetta, la Fig. VI.

la quale vogliamo quì un poco ſchiarire.

Noi oſſerviamo, che quando il punto E ſi avvicina a B diventando F, H, Q &c., la retta EB perpetuamente ſi accorcia, e l'angolo EBA, che ella fa colla retta AB, ſempre più ſi apre. Ma per quanto ſi è accorciata la linea QB, l'angolo QBA ſarà ſempre un'angolo; poichè per renderlo ſenſibile non biſognerà altro, che prolungare quella linea accorciata QB verſo R. Ed avverrà egli il medeſimo, allorchè la linea QB, a forza di ſempre diminuirſi, è arrivata in fine allo zero? quale allora è diventata la ſua poſizione? quale è divenuto il ſuo prolungamento.

Egli è evidente, che non è allora altro, che la retta BS, che tocca il circo-

circolo in un ſol punto B, ſenza rincontrarlo in neſſun' altro luogo; e che per queſta ragione ſi chiama tangente.

Di più è chiaro, che mentre che la linea EB, viene continuamente a ſcemare fino ad annientarſi; la retta AE, che diventa ſucceſſivamente AF, AH, AQ &c., ſi avvicina ſempre ad AB, e finalmente ſi confonde con lei. Dunque l'angolo alla circonferenza AEB, dopo eſſer diventato AFB, AHB, AQB, diventa in ultimo luogo l'angolo ABS fatto dalla corda AB, e dalla tangente BS, e queſt' angolo, che ſi chiama angolo al ſegmento, deve ſempre conſervare la proprietà di aver per miſura la metà dell'arco AGB.

La tangente al circolo è la linea, che non lo tocca, che in un punto.

L'angolo al ſegmento è quello, che è fatto dalla corda, e dalla tangente.

La ſua miſura è la metà dell' arco del ſegmento.

Benchè queſta dimoſtrazione ſia forſe un poco troppo aſtratta per gli prin-

principianti, contuttociò non ho creduto, se non bene il recarla, perchè sarà utilissimo a quelli, i quali vogliono inoltrarsi co' loro studj fino alla Geometria dell' infinito, l' avvezzarsi di buon' ora a simili considerazioni.

Che se questi trovano essere una tale dimostrazione sopra alle loro forze, è forza di metterli a portata d' intenderne un' altra, spiegando loro la principale proprietà delle tangenti.

XIX.

FIG. VII. Questa proprietà è, che una tangente al circolo in qualunque punto B, deve essere perpendicolare al diametro IDB, che passa per questo punto. Perchè come la curvità del circolo è sì uniforme, che un diametro qualunque IDB, lo divide in due

La tangente è perpendicolare al diametro, che passa pel punto, in cui lo tocca.

due ſemicircoli IAB, IOB uguali, ed ugualmente ſituati in riguardo a queſto diametro, biſogna, che le due parti BS, BH della tangente comune a queſti due ſemicircoli ſiano pur così egualmente ſituati a riſguardo di queſto diametro: or queſto non potrebbe avvenire, ſe IDB non foſſe perpendicolare alla tangente HBS.

X X.

Di quì ſi vedrà facilmente, perchè l'angolo al ſegmento ABS ha per miſura la metà dell'arco AGB.

Perchè l'angolo ADB inſieme cogli altri due angoli uguali DAB, DBA fa (1. Part. Artic. LXIV.) due retti. Dunque la metà dell'angolo ADB inſieme coll'angolo DBA fa un retto. Ma l'angolo DBA inſieme coll'angolo ABS dà pure un retto. Dunque l'angolo ABS è ugua-

le

le alla metà dell'angolo ADB, dunque la misura di ABS sarà la metà dell'arco AGB.

XXI.

La seconda dimostrazione, che abbiamo dato di questa proprietà del circolo, che l'angolo ABS ha per misura la metà dell'arco AGB, ci somministra la soluzione del seguente problema.

Fig. VIII. e IX.

Cosa sia un segmento capace di un angolo dato.

Descrivere sopra AB un segmento di circolo capace dell'angolo dato L; cioè a dire, un segmento AFB, nel quale tutti gli angoli AFB alla circonferenza sono eguali all'angolo L.

Maniera di fare un segmento capace di un angolo dato.

Per sciogliere questo problema, bisogna fare in A, e in B gli angoli BAS, ed ABS, ciascuno uguali all'angolo L, ed alzare sopra AS, e sopra BS le due perpendicolari AD,

AD, e BD, il punto D, dove queſte s'incontreranno, ſarà il centro dell'arco cercato AFB.

Imperocchè per l'articolo XIX. le rette BS, ed AS ſaranno le tangenti del circolo, il centro del quale è D, ed il raggio AD, ovvero BD, poichè BD, ovvero AD ſono perpendicolari a BS, ed a AS. Di più per l'articolo precedente l'angolo ABS ha per miſura la metà di AGB, e per l'Articolo XV. gli angoli, che ſono, come AFB, ſono pure miſurati dalla metà di AGB. Dunque queſti angoli AFB ſaranno eguali ad ABS, cioè all'angolo L, come ſi domandava.

XXII.

La ſcoperta delle proprietà del ſegmento del circolo, che noi abbiamo ſpiegata, è veriſimilmente dovuta

ta alla ſemplice curioſità de' Geometri. Ma è ſtato di queſta ſcoperta quello, che tutto il giorno avviene di molte altre; e quello, che non ſi crede ſubito utile, lo diviene nel tempo ſuſſeguente. Si è fatto nella pratica delle applicazioni aſſai felici delle proprietà del circolo, che noi abbiamo dimoſtrato. Io ne darò quì una ſola di queſte applicazioni; la quale ſi troverà nella ſoluzione del problema ſeguente, ed è ſpeſſo neceſſaria nella Geografia.

FIG. X.

Trovar la diſtanza di un luogo riſpetto a tre altri, de' quali ſono conoſciute le poſizioni.

A, B, C ſono tre luoghi, de' quali ſi conoſcono le diſtanze reſpettive AB, BC, AC; e ſi tratta di ſapere, a qual diſtanza da queſti luoghi è un punto D, donde ſi poſſono vedere tutti e tre, ma non ſi può di lì ſortire, per fare ſul terreno le operazioni.

Si

Si comincierà dal ſegnare ſulla carta tre punti *a*, *b*, *c*, i quali ſieno tra loro ſituati nella maniera medeſima, che i tre punti A, B, C, o per parlare, come parlano i Geometri, ſi farà il triangolo *abc* ſimile al triangolo ABC. FIG. X., e XI.

Avendo di più oſſervato col ſemicircolo la grandezza degli angoli ADB, BDC, ſi farà ſopra *ab* il ſegmento del circolo *bda* capace dell'angolo ADB, e ſulla retta *bc* il ſegmento del circolo *bdc* capace dell'angolo BDC: il punto *d*, dove ſi incontreranno queſti ſegmenti, ſegnerà ſulla carta la poſizione del luogo D; cioè le linee *da*, *db*, *dc* ſaranno nell' iſteſſa proporzione riſpetto ad *ab*, *bc*, *ac*, che le diſtanze cercate DA, DB, DC, riſpetto alle diſtanze date AB, BC, AC; ciò, che non ha

biſogno di dimoſtrazione, dopo quello, che abbiamo veduto delle figure ſimili.

XXIII.

Si potrebbe far vedere facilmente, che la pratica ha tirato altri ſoccorſi dalle proprietà del circolo, che abbiamo dimoſtrate. Ma ſarà meglio di paſſare ad altre proprietà del circolo, che ſono ſtate dedotte dalle precedenti, e che hanno eſſe pure la loro utilità.

Per proceder con ordine nel diſcoprire queſte proprietà, noi cominceremo dall'oſſervare, che due angoli qualunque EDC, EBC, che ſono fondati ſul medeſimo arco EC, eſſendo eguali, ne ſegue, che gli triangoli DAE, BAG abbiano gli angoli eguali, cioè (1. Part. Art. XXXIX.) che queſti triangoli ſieno ſimili.

TAVOLA X. FIG. I.

Perchè

Perchè per la ragion medeſima, che l'angolo EDC è uguale all'angolo EBC, l'angolo DEB ſarà uguale all'angolo DCB; e quanto agli angoli DAE, BAC e' ſono manifeſtamente eguali, o ſia perchè ſono fatti dalle linee medeſime, o ſia perchè due triangoli, de' quali uno ha due angoli riſpettivamente eguali a due angoli dell' altro triangolo, hanno neceſſariamente il terzo angolo eguale (1. Part. Art. XXXVIII.)

Per conoſcere più facilmente in decorſo ne' triangoli ADE, ABC le proprietà generali de' triangoli ſimili, noi ſoprapponemo il triangolo DAE al triangolo BAC, ponendo AD ſopra AB, ed AE ſopra AC, affinchè DE ſia parallela a BC. Ci ricorderemo allora, FIG. I., e II.

1. Che ſe due triangoli ADE,

ABC ſono ſimili in quattro lati AC, AE, AB, AD, ſono in proporzione (1. Part. Art. XXXIX.)

2. Che in ogni proporzione il prodotto degli eſtremi è uguale al prodotto de' medi (2. Part. Art. VIII.) e di là conchiuderemo, che il rettangolo, ovvero il prodotto di AC per AD è uguale al rettangolo di AE per AB, proprietà del circolo molto notabile, e che ſi può proporre così. Se in un circolo ſi tira ad arbitrio due rette, che ſi ſeghino, il prodotto delle due parti della prima è uguale al prodotto delle due parti dell'altra.

Se due corde ſi ſeghino in un circolo, il rettangolo fatto dalle parti dell' una è uguale al rettangolo fatto dalle parti dell'altra.

XXIV.

FIG. III. Se le due rette BE, DC ſi ſegano perpendicolarmente, e l'una di queſte due rette è un diametro DC, è chiaro, che le due parti AB, AE dell' altra retta BE ſaranno eguali tra loro;

ro; di sorte che la proprietà precedente si proporrà così in questo caso particolare. Se sul diametro DC di un circolo si alza una perpendicolare qualunque AB, il quadrato di questa perpendicolare sarà uguale al rettangolo di AD per AC.

Il quadrato di una perpendicolare qualunque al diametro di un circolo è uguale al rettangolo delle due parti del diametro.

XXV.

Spesso avviene, che si ha bisogno di trasformare un rettangolo in un quadrato. L'Articolo precedente ci suggerisce un mezzo facile. Sia AGFE il rettangolo proposto, si prolungherà AC in D in maniera, che AD sia uguale ad AE, e si descriverà il semicircolo DBC, che abbia per il diametro DC; prolungando insieme il lato EA, finoche rincontra il semicircolo, si avrà AB lato del quadrato cercato ABGH uguale al rettangolo dato AFCE.

Trasformare un rettangolo in un quadrato. Fig. IV.

XXVI.

Spesso si propone un problema, il quale non è altro, che il risoluto pur ora, ma altrimenti proposto. Questo è di trovare una linea, che sia media proporzionale tra due linee date. S'intende per media proporzionale una linea, la quale tanto è grande per rapporto alla più piccola delle due linee date, quanto è piccola per rapporto alla più grande: cioè a dire, che se per esempio AB è media proporzionale tra AD, ed AC, si potrà dire, che AD è ad AB, come AB ad AC. Ov'è ben facile di vedere, che questo problema è l'istesso, che 'l precedente: poichè (II. Part. Art. VIII.) il prodotto di AD, per AC, o vogliam dire, il rettangolo di queste due linee sarà uguale al prodotto di AB per AB, cioè al quadrato di AB. Dun-

Cosa sia una media proporzionale tra due linee rette.

Dunque allorchè si vorrà trovare una media proporzionale trà due linee date, si trasformerà il rettangolo di queste due linee in un quadrato, il lato del quale sarà la linea cercata. Maniera di trovarla.

XXVII.

Si può ancora trovare una media proporzionale tra due linee in un'altra maniera, la quale discende dalla proprietà del circolo spiegata nell' Articolo XIII. Supponghiamo, che AC sia la più grande delle due linee date, & AD la più piccola, e si alzi DB perpendicolare sopra AC, dal punto B, ove ella incontrerà il semicircolo ABC, tirando sul diametro AC la linea AB, sarà questa media proporzionale tra AD, ed AC. Perchè tirando BC, è chiaro, che 'l triangolo ABC sarà rettangolo in B. Un altra maniera. FIG. V.

Dunque (1. Part. Art. XXXVIII.) questo triangolo sarà simile al triangolo ABD; poichè questi due triangoli hanno l'angolo A comune. Ma se i triangoli ADB, ed ABC sono simili, hanno i loro lati proporzionali. Dunque AD è ad AB, come AB ad AC. Dunque AB è media proporzionale tra AD, ed AC.

XXVIII.

Trasformare una figura rettilinea in un quadrato.

Se uno vuole trasformare una figura rettilinea qualunque in un quadrato, per ridurre questo problema all' Articolo XXV., basta fare di questa figura un rettangolo: ciò, che sarà facile, perchè le figure rettilinee non sono, che un'ammasso di triangoli; e ciascun triangolo è la metà di un rettangolo, che ha la base, e la medesima altezza; e tutti i rettangoli provenienti da' triangoli non

non faranno, che un sol rettangolo; dando a tutti loro un altezza comune (II. Part. Art. VI.)

XXIX.

Le figure, il contorno delle quali sono archi di circolo, potranno nella maniera medesima essere trasformati in quadrati; dopo che si sarà misurato praticamente la lunghezza degli archi, da cui sono composte. Perchè si potrà allora trasformare queste figure, come le rettilinee, in rettangoli. Per questo si ricorrerà agli Articoli IX., e X., dove abbiano insegnato a misurare tutte le sorti di figure circolari.

XXX.

Fare un quadrato, che sia ad un altro in ragion data.

Dalla proprietà del circolo spiegata nell'Articolo XXIV. si ricava ancora un metodo facilissimo per fare un quadrato, il quale sia a un quadrato

drato dato in ragion data: problema, che noi abbiamo promeſſo nell' Articolo XXII. della Seconda Parte.

FIG. VI. Supponghiamo, per eſempio, che uno voglia fare un quadrato, che ſia al quadrato ABCD, come la linea M alla linea N. Si dividerà (I. Part. Art. XLI.) il lato CB al punto E in maniera, che CB ſia a BE, come la linea N alla linea M. Tirando EF parallela ad AB, il rettangolo ABEF avrà la ſuperficie medeſima, che il quadrato richieſto. Dunque non rimane, che di trasformare queſto rettangolo niun quadrato.

XXXI.

FIG. VII., e VIII. Fare un poligono, che ſia ad un poligono ſimile in data ragione.

Se uno vuol fare un poligono HIKLM, che ſia ad un poligono ſimile ABCDE, in ragione della linea X alla linea Y, ſi comincierà dal fare ſul lato AB del poligono dato ABCDE

ABCDE il quadrato ABGF. Si ricercherà ancora un' altro quadrato HIOQ, che ſia al quadrato ABGF, come la linea X alla linea Y. Ed allora deſcrivendo ſul lato HI di queſto quadrato un poligono HIKLM, ſimile al primo ABCDE, queſto nuovo poligono ſarà quello, che ſi domanda. La ragione è facile a vedere, ſe uno ſi ricorda (I. Part. Art. XLVIII.) che le figure ſimili ſono tra loro, come i quadrati de' loro lati omologhi.

XXXII.

Fare un circolo, che ſia a un altro circolo in ragion data.

Se uno voleſſe fare un circolo, l'area del quale foſſe quella di un circolo dato, come X al Y, biſogna coſtruire un quadrato, che ſia al quadrato del raggio di queſto primo circolo, come X al Y; ed il lato di queſto quadrato ſarà il raggio del circolo richieſto.

XXXIII.

XXXIII.

Ecco un'altra proprietà del circolo dedotta da quella, che ha dato argomento del problema antecedente.

FIG. IX.

Se da un punto preso fuori d'un circolo si tirino due linee, che lo dividano, i rettangoli di queste due rette per le loro parti esteriori sono uguali.

Se da un punto A preso fuori d'un circolo si menano ad arbitrio due rette ABC, ADE, che seghino ciascuna la circonferenza in due punti, ed insieme si tirano le rette CD, BE, i triangoli ACD, AEB saranno simili. Perchè l'angolo A è comune a' due triangoli, ed hanno gli angoli alla circonferenza C, ed E uguali. Se da questo, che i triangoli CAD, EAB sono simili, segue, che le quattro linee AB, AD, AE, AC sono in proporzione, e conseguentemente, che il rettangolo di due rette AB, AC, è uguale al rettangolo delle due rette AD, AE; quel, che si può esporre così. Se da

nu

un punto qualunque A preso fuori del circolo, si tirano ad arbitrio due rette AC, AE, che attraversano questo circolo; il rettangolo della retta AC per la sua parte esteriore AB, sarà uguale al rettangolo della retta AE per la sua parte pure esteriore AD.

XXXIV.

Quando la retta, che parte dal punto A, in luogo di segare il circolo, non fa, che toccarlo, come AF; la proprietà precedente si cangia in questa qui: il quadrato di una tangente AF, è uguale al rettangolo prodotto dalla segante qualunque AE, e dalla sua parte esteriore AD. Ciò, ch'è facile a dimostrare. Perchè riguardando la retta AF, che tocca il circolo, come una linea, che lo divida in due punti infinitamente

Il quadrato della tangente è uguale al rettangolo della segante per la sua parte esteriore.

mente vicini, le linee AB, AC non ſono allora, che una ſteſſa linea AF, ed in luogo del rettangolo di AB, per AC, ſi ha il quadrato di AF.

XXXV.

La propoſizione dimoſtrata nell' Articolo precedente dandoci il valore del quadrato della tangente AF, ci inſegna pure a tirare queſta tangente dal punto dato A. Per tirarla, ſi ricorderà (Art. XIX.) che il raggio FG è perpendicolare alla tangente FA. E così non biſogna altro, che trovare ſul circolo dato il punto F, tale, che l'angolo AFG ſia retto. Dunque deſcrivendo ſopra AG un ſemicircolo, il punto, ove dividerà il circolo FKO, ſarà (Artic. XIII.) il punto cercato F.

FIG. X.

Da un punto dato fuori di un circolo tirare la tangente a quello ſteſſo circolo.

ELE-

ELEMENTI
DI
GEOMETRIA.

PARTE QUARTA.

Della maniera di misurare i solidi, e le loro superficie.



I Principj, che noi abbiamo stabilito nelle tre prime parti di questa opera, sarebbero sufficienti a potere con essi sciogliere problemi molto più difficili di quelli, che noi

noi ſiamo per proporre: ma è più conforme al metodo ſin'ora tenuto di paſſare ora alla miſura de' ſolidi; cioè a dire delle eſtenſioni finite, le quali hanno ſempre tre dimenſioni, lunghezza, larghezza, e profondità.

Queſta ricerca è ſtata ſenza dubbio uno de' primi objetti, che abbiano potuto fiſſare l'attenzione de' Geometri. Per eſempio; avrà uno voluto ſapere, quante pietre riquadrate vi erano in un muro, di cui
TAVOLA XI. l'altezza AD, la larghezza AB, e
FIG. I. la profondità, ovvero groſſezza BG, erano conoſciute. Sarà ſtato propoſto di determinare la quantità dell'
FIG. II. acqua, che conteneva una foſſa, ovvero una conſerva ABCD; ſi ſarà voluto trovare la ſolidità di una torre, di un'obeliſco, di una caſa, d'un campanile &c.

Per

Per trattar le figure, che hanno tre dimenſioni nella maniera medeſima, che abbiamo trattato di quelle, che ne hanno due, noi cominceremo dall'eſaminare i ſolidi terminati da' piani.

Non occorre quì parlare della maniera di miſurare le ſuperficie di queſti corpi, non potendo eſſere quelle, che figure rettilinee unite inſieme, e conſeguentemente la lor miſura dipende da quello, che ſi è detto nella prima parte.

I.

Per miſurare la ſolidità de' corpi il più naturale è di ridurli tutti al ſolido più ſemplice; come per miſurare le ſuperficie, ſi ſono ridotte al quadrato. Ora il cubo ſi è il ſolido più ſemplice, che è in effetto ne' ſolidi quello, che il quadrato è nelle

[Il cubo è una figura ſolida terminata da ſei quadrati: ed è la comune miſura de' ſolidi.

superficie, cioè a dire è uno spazio
Fig. III. come *abcdefgh*, di cui la lunghezza, la larghezza, e la profondità sono uguali, o quello, che torna allo stesso, è una figura terminata da sei facce uguali, che sono quadrati.

Si chiama lato del cubo il lato de' quadrati, che li servono di faccia.

Per un piede cubico s'intende un cubo, il di cui lato è un piede; così un dito cubico è un cubo, il di cui lato è un dito.

II.

I solidi, che più comunemente si devono misurare, sono delle figure
Fig. I. ABCDEFGH terminate per sei facce rettangole ABCD, CBGF, CFED, DEHA, GFEH, ABGH.

Il parallelipipedo è un solido terminato per 6. rettangoli.

Si chiamano questi solidi Parallelipipedi, perchè le loro facce opposte conservando in tutti i loro punti

la

la distanza medesima l'una dall'altra, sono dette parallele, nel modo medesimo, che parallele sono dette le linee, allorchè conservano per tutto la distanza medesima.

I piani paralleli sono quelli, che conservano sempre tra loro la medesima distanza.

III.

Ora se uno si propone di misurare de' solidi di questa specie, l'analogia di questo problema con quello, ove si è trattato della misura delle superficie rettangole, somministrerà un mezzo facile per risolverlo.

Si comincierà col misurare separatamente la lunghezza AD, la larghezza AB, e la profondità BG della figura proposta, o in piedi, o in dita &c. Si moltiplicherà i tre numeri, che uno avrà trovato l'uno per l'altro, ed il prodotto, che verrà da questa moltiplicazione, esprimerà

Misura del parallelipipedo.

quanto il parallelipipedo conterrà di piedi cubici, ò di dita cubiche &c. Per meglio dimoſtrare, come ſi fa queſta operazione, noi ne daremo un eſempio.

Supponghiamo, che la lunghezza AD ſia di 6. piedi, la larghezza AB di 5., e la profondità BG di 4., il rettangolo ABCD (1. Part. Art. XI.) avrà ſei volte cinque, ovvero 30. piedi quadrati. Se di poi s'immagina, che le linee BG, CF, DE, AH, che miſurano tutte ugualmente la profondità del ſolido, ſiano ciaſcuna diviſe in quattro parti uguali, e che per li punti di diviſione corriſpondenti ſi faccia paſſare altrettanti di piani paralleli gli uni agli altri, queſti piani divideranno il parallelipipedo propoſto in quattro altri parallelipipedi, che avranno ciaſcuno

un

un piede di profondità, e che saranno tutti uguali, e simili. Ora la sola vista della figura dimostra, che il primo di questi parallelipipedi contiene 30. piedi quadrati. Dunque il solido totale ABCDEFGH conterrà quattro volte 30., ovvero 120. piedi cubici.

IV.

Noi non ci fermeremo a spiegare i differenti mezzi, che si possono praticamente usare per costruire de' parallelipipedi, perchè questi mezzi sono per la maggior parte sì facili a trovare, che non vi ha persona, che non se li possa immaginare. Ma bensì daremo la formazione seguente del parallelipipedo, la quale è più utile a considerare delle altre.

I parallelipipedi sono prodotti da un rettangolo, che si muo-

Si concepisca un quadrato, ovvero un rettangolo ABGH, il quale si muo-

muove parallelamente a se medesimo.

muove parallelamente a se medesimo in modo, che i suoi quattro angoli A, B, G, H, facciano ciascheduno una delle quattro linee AD, BC, GF, HE, perpendicolari al piano del rettangolo ABGH.

V.

La linea perpendicolare a un piano è quella, che non pende da nessun lato sù questo piano.

E' presso che inutile l'avvertire, che sotto il nome di linee perpendicolari a un piano noi intendiamo una linea, che non pende da banda alcuna sù questo piano, e similmente che un piano, il quale non pende più da un lato, che da un altro sù un secondo piano, è detto perpendicolare a questo secondo piano: queste due definizioni sono analoghe a quelle, che noi abbiamo date di una linea perpendicolare a un'altra linea.

Egli è il medesimo d' un piano perpendicolare a un altro piano.

V I.

FIG. IV.

Ora da questo ne segue, che la linea

linea AB, che è perpendicolare al piano X, deve essere perpendicolare a tutte le linee AC, AD, AE &c., le quali partono dal piede A di questa linea, e sono dentro questo piano. Perchè egli è evidente, che se pendesse verso una di queste linee, ella farebbe inclinata verso qualche lato del piano. Dunque non li sarebbe più perpendicolare.

La linea, che è perpendicolare a un piano, è perpendicolare a tutte le linee di questo piano, le quali partono dal punto, ove ella cade.

VII.

Per rappresentarsi di una maniera ben sensibile, come la linea AB può essere perpendicolare a tutte le linee, che partono dalla sua estremità A; non si dovrà fare, che una figura di rilievo nel modo seguente.

Si costruirà di qualche materia unita, e facile a spiegarsi, come è il cartone, un rettangolo FGDE diviso in due parti uguali dalla retta AB, FIG. V.

AB, perpendicolare a' lati ED, FG, si piegherà poi questo rettangolo in maniera, che la piegha sia per lungo della linea AB, e così piegato si porrà sul piano X. Egli è evidente, che qualunque apertura si dia alle due parti FBAE, GBAD, del rettangolo piegato EADGBF, queste parti resteranno sempre applicate sul piano X, senza che la linea AB cangi di posizione riguardo a questo piano: dunque questa retta AB sarà perpendicolare a tutte le linee, le quali partono dal suo piede, e che saranno nel piano X, poichè i lati AE, AD del rettangolo piegato, saranno successivamente applicati sù ciascuna di queste linee, che abbiamo ora descritte.

Fig. VI.

VIII.

Dalla costruzione precedente si tira

tira una molto comoda pratica, per alzare da un punto dato sù un piano una linea perpendicolare a queſto piano, o per calare da un punto preſo fuori di queſto piano una linea, che ſia perpendicolare a queſto piano. Perchè o che il punto propoſto ſia in quel piano, come in A, o ſia fuori, come in H, ſi potrà ſempre fare avanzare il rettangolo EFBGDA ſul piano X, finchè la piegatura AB tocchi il punto dato, e in tutti e due i caſi AB ſarà la perpendicolare domandata.

FIG. VII.

Pratica ſemplice per elevare o abaſſare linee perpendicolari a de' piani.

I X.

Ne ſegue ancora di là, che una linea AB ſarà perpendicolare a un piano X, tutte le volte, che ella ſarà perpendicolare a due linee AE, AD di queſto piano. Perchè allora AB potrà riguardarſi, come la piegatura

Una linea ſarà perpendicolare a un piano, ſe ſarà perpendicolare a due linee di queſto piano, le quali partono dal punto, ove ella cade.

tura di un rettangolo, del quale uno de' lati piegati si applichi sopra AE, e l'altro sopra AD. Or questa piegatura non potrà non essere perpendicolare al piano X.

X.

Maniera di elevare un piano perpendicolare ad un'altro.

Se si vuole elevare sopra una linea qualunque KL, un piano perpendicolare al piano X, nel quale è questa linea, si potrà per questo ancora servirsi del rettangolo piegato GBFEAD. Perchè e' non bisognerà, che posare sulla linea KL il lato AD d'una delle parti ADGB di questo rettangolo piegato; ed il piano di questa parte ADGB farà quello, che si dimanda.

XI.

Si vedrà facilmente, che se si posa un terzo piano Y sù i due lati FB, BG, del medesimo rettangolo piegato,

Fig. VIII.

to, questo piano Y sarà ancora perpendicolare alla linea AB, e per conseguenza parallelo al piano X.

Tirare un piano parallelo a un'altro.

Dunque se a un piano X si alzino tre perpendicolari EF, AB, DG di eguale lunghezza, il piano Y, che passerà per li tre punti F, B, G, sarà parallelo al piano X.

XII.

Quando due piani non saranno paralleli, e' sarà facile di conoscere l'angolo, che fanno tra loro, servendosi pure del nostro rettangolo piegato. Per ciò vedere, si applichi una delle due parti ABGD di que- FIG. IX.
sto rettangolo sul piano X, egli è evidente, che l'angolo EAD, ovvero il suo eguale FBG, misurerà l'inclinazione del piano EABF sul piano DABG. Ora se uno avverte, che AB è la comune sezione di que-

sti

ſti piani, e che EA, e AD ſono ciaſcuna perpendicolari ad AB, ſe ne caverà ſenza difficoltà la ſeguente regola.

Misurare l'inclinazione di un piano sù un'altro.

Eſſendo dati due piani non paralleli, ſi ha da cominciare dal trovare la linea retta, che è loro comune ſezione; dipoi da un punto qualunque di queſta linea, ſi tirino due perpendicolari, le quali ſieno ciaſcuna dentro uno di queſti piani, e l'angolo, che faranno tra loro queſte due perpendicolari, miſurerà l'angolo, che li due piani dati fanno tra loro.

XIII.

Siccome facilmente ognuno vedrà, che muovendoſi ABFE attorno della piegatura AB, la retta AE, di cui l'eſtremità E deſcrive un'arco di circolo ED, non eſce mai da un piano EAHD, perpendicolare al piano X, e

X, e che l'inclinazione della retta EA ſul piano X non è in ſomma altro, che l'angolo EAD; conoſcerà ancora, che l'inclinazione di una retta qualunque EA ſul piano X, è miſurata per l'angolo EAH fatto tra queſta linea, e la linea AD, che paſſa per A, e per H punto del piano X, ove caſca la perpendicolare EH, abbaſſata sù queſto piano da un punto qualunque E della retta AE.

Miſurare l'inclinazione di una linea sù un piano.

XIV.

Il ſolo vedere la figura, di cui ci ſiamo ſerviti nell'Articolo precedente, ci forniſce di un nuovo mezzo d'abbaſſare da un punto E, fuori del piano X, una linea EH perpendicolare a queſto piano.

Avendo tirato una linea qualunque BAS nel piano X, ſi calerà dal punto dato E la perpendicolare EA a que-

Nuova maniera di calare una linea perpendicolare a un piano dato.

a queſta linea. Ciò fatto, dal punto A, ove cade queſta perpendicolare, ſi alzi nel piano X la AD perpendicolare ad AB, ed abbaſſando inſieme dal punto dato E, alla retta AD la perpendicolare EH, queſta linea ſarà la perpendicolare al piano X.

XV.

Seconda maniera di alzare una linea perpendicolare a un piano dato.

Di quà ſi cava una ſeconda maniera di alzare al piano X una perpendicolare MN, da un punto M dato sù queſto piano.

Avendo abbaſſato da un punto qualunque E preſo fuori del piano X la perpendicolare EH a queſto piano, ſi tirerà pel punto dato M la retta MN, che ſia parallela ad HE, e quella ſarà la perpendicolare al piano X.

Dopo

XVI.

Dopo il parallelipipedo, il ſolido più ſemplice è il priſma retto. Queſto è una figura ABCDEFGHIKLM, di cui le due baſi oppoſte, e parallele ſono due poligoni eguali, e collocati talmente, che i lati GF, FE &c. dell'uno ſieno paralleli a' lati BC, CD &c. dell'altro, e di cui le altre facce ſieno rettangoli A B G H, BGFC &c. FIG. X.

Il priſma retto è una figura ſolida, di cui le due baſi oppoſte ſono due poligoni uguali, le altre facce ſono rettangoli.

XVII.

I Geometri ſuppongono queſte figure formate, come i parallelipipedi da una baſe ABCDLM, che ſi muove parallelamente a ſe medeſima in maniera, che i ſuoi angoli A, B &c. ſcorrano lungo di linee perpendicolari al piano della baſe.

Formazione de' priſmi retti.

XVIII.

Per diſtinguere le differenti ſpecie

cie di prismi retti, vi si aggiunge il nome del poligono, che loro serve di base. Il prisma esagonale, per esempio, è quello, di cui la base è un' esagono.

XIX.

Due prismi, che hanno le basi uguali, sono nella ragione medesima delle loro altezze.

Per trovare la maniera di misurare tutte le sorti di prismi retti, gioverà l' osservare, che di due prismi retti, di cui le basi sieno eguali, quello, che avrà una più grande altezza, sarà più grande in solidità nella medesima ragione, che la sua altezza sarà più grande.

XX.

Due prismi, che hanno la medesima altezza, sono nella ragione medesima, che le loro basi.

Si osserverà ancora, che due prismi retti, che abbiano la medesima altezza, ma uno abbia una base, che contenga un certo numero di volte la base dell' altro, saranno tra loro nella medesima ragione, che le lo-

loro baſi. La verità di queſta propoſizione ſi conoſcerà facilmente, facendo attenzione alla formazione de' priſmi ſpiegata nell'Artic. XVII.

Che *a b c d e f g h i k l m*, ed ABCDEFGHIKLM ſieno i due priſmi, che hanno la medeſima altezza, e che la baſe *abcdlm* del più piccolo, ſia, per eſempio, il quarto della baſe ABCDLM. Poichè i due priſmi ſono prodotti da' movimenti di queſte due baſi, ne ſegue, che un piano qualunque, che ſarà parallelo al piano, ove ſono le due baſi, taglierà dentro li due priſmi due poligoni, del quale ciaſcuno ſarà uguale alla baſe del priſma, in cui è tagliato: cioè a dire, che la ſezione del gran priſma ſarà ſempre quadrupla di quella del piccolo. Dunque il priſma ABCDEFGHIKLM po- FIG. X. ; XI.

trà eſſere riguardato, come compoſto di ſezioni tutte quadruple di quelle del priſma *abcdefghiklm*, e per conſeguenza la ſolidità del primo priſma ſarà quadrupla di quella del ſecondo.

XXI.

La miſura del priſma retto è il prodotto della baſe per la ſua altezza.

Dopo queſte due oſſervazioni, e non ſarà punto difficile di formar la regola ſeguente per miſurare tutti i priſmi rettì.

Si miſurerà in piedì, o in dita &c. quadrate, l'area della baſe del priſma propoſto, poi ſi moltiplicherà il numero de' piedì, delle dita &c., che conterrà l'altezza del priſma, ed il prodotto darà il numero dei piedi, o dita &c. cubiche, contenute nel priſma propoſto, e conſeguentemente queſta ſarà la ſua miſura.

XXII.

XXII.

Il nome di prisma si dà ancora a' solidi (fig. XIII.) che hanno due basi poligone eguali, siccome i precedenti, ma le altre facce sono parallelogrammi, in luogo di essere rettangoli. Per distinguere questi nuovi prismi da quelli, de'quali abbiamo parlato, si chiamano prismi obliqui, per contraporli agli altri, che noi abbiamo chiamato prismi retti.

I prismi obliqui differiscono da' prismi retti in questo, che le facce, che sono in questi rettangoli, negli altri sono parallelogrammi.

XXIII.

I prismi obliqui si concepiscono formati da una base *abcki*, che si muove parallelamente a se medesima, e in tal maniera, che i suoi angoli secondino le linee parallele *ag*, *bh*, *cd* &c., che sono elevate fuori del piano della base, e che non le sono perpendicolari.

XXIV.

L'analogia, che vi è tra la formazione di queſti, e quella de' priſmi retti, di cui abbiamo parlato (Artic. XVII.) dà facilmente la miſura della ſolidità de' priſmi obliqui. Perchè ſe uno immagina al lato di un priſma obliquo *abcdefghik* un priſma retto ABCDEFGHIK, che abbia la medeſima baſe, e che ſieno queſti priſmi compreſi tra due piani paralleli, ſi vedrà, che la ſolidità di queſti due corpi ſarà aſſolutamente la medeſima.

FIG. XII., e XIII.

Perchè ſe per un punto qualunque P dell'altezza uno fa paſſare un piano parallelo alla baſe, le ſezioni NOPQR *nopqr*, che queſto piano formerà in ciaſcuno de' due priſmi, potranno eſſere riguardate, come le baſi eguali ABCKI, *abcki*

giunte

giunte a NOPQR, *nopqr* col movimento, che forma queſti due priſmi, e così queſte due ſezioni ſaranno poligoni uguali.

Ora ſe tutte le ſezioni immaginabili, che ſi poſſono formare in queſti due priſmi per mezzo de' medeſimi piani, che li ſegano, ſono eguali, e converrà, che eguali ſieno le ſomme di queſte ſezioni, cioè de' priſmi.

Queſta propoſizione ſi ſuole ordinariamente proporre così. I priſmi obliqui ſono uguali a' priſmi retti, allorchè hanno la medeſima baſe, e la medeſima altezza. Si chiama l'altezza del priſma la perpendicolare calata dal piano ſuperiore ſull'inferiore, o ſopra di lui prolungato.

I priſmi obliqui ſono uguali a' priſmi retti, allorche hanno la medeſima baſe, e la medeſima altezza.

XXV.

E come i parallelipipedi devono eſſer contati nel numero de' priſmi, ſi ſtenderà a quello, che abbiamo detto de' priſmi, a' parallelipipedi obliqui, cioè a dire alle figure *abcdefgh* prodotte col far muovere un quadrato, un rettangolo, ovvero un parallelogrammo talmente, che i ſuoi quattro angoli ſecondino le linee parallele, che ſono ſopra la baſe alzate obliquamente. Così il parallelipipedo obliquo *abcdefgh* ſarà uguale al parallelipipedo retto ABCDEFGH, ſe la baſe *abgh* è la medeſima, ovvero ha la medeſima ſuperficie, che la baſe ABGH, e ſe la perpendicolare calata dal piano *dcfe* ſul piano *abgh* è uguale alla perpendicolare calata dal piano DCFE ſul piano ABGH.

L' iſteſſo è de' parallelipipedi obliqui, riſpetto a' parallelipipedi retti.

TAVOLA XII.

FIG. I., e II.

XXVI.

XXVI.

Avendo veduto quello, che concerne i parallelipipedi, ed i prismi, esaminiamo ora le piramidi, cioè a dire i corpi, che sono, come ABCDEFG, compresi da un certo numero di triangoli, che partono tutti da una medesima sommità A, e che terminano a una base poligona qualunque BCDEFG. Egli è necessario di considerare queste sorti di solidi non solamente perchè si incontrano negli edifizj, e in altri simili lavori; ma ancora perchè tutti i solidi terminati da' piani, sono tante piramidi unite, siccome le figure rettilinee sono tanti triangoli. Per rendersi di questo certi, non bisogna fare altro, che tirare da un punto preso, ove uno vorrà, nell'interiore del corpo pro- FIG. III.

posto delle linee a tutti gli angoli di questi corpi.

XXVII.

Si distinguono le piramidi l'une dall'altre, come li prismi, dal nome della figura, che loro serve di base.

XXVIII.

Allorchè la piramide ha per base una figura regolare, e la sua sommità corrisponde perpendicolarmente al centro H della sua base, come nella Fig. 111., la piramide è allora chiamata piramide retta; al contrario è nominata piramide obliqua, allorchè la sommità non è perpendicolarmente sopra al centro, come nella Fig. v.

XXIX.

Per vedere la maniera di misurare le piramidi di tutte le sorti, tanto

to rette, che oblique, cominciaremo dal fare sù queſte figure alcune rifleſſioni generali, alle quali conduce la conoſcenza delle proprietà dei priſmi.

Subito che uno fa attenzione all' egualità de' priſmi, che hanno la medeſima baſe, e la medeſima altezza, ſi ricorderà, che i parallelogrammi ſono così uguali tra loro, allorchè hanno queſte medeſime condizioni, e l' iſteſſo pure è de' triangoli.

Queſte tre verità rappreſentandoſi alla mente, l' anologia deve portare a credere, che le proprietà, che ſono comuni a' parallelogrammi, ed a' triangoli, le poſſono eſſere ancora a' priſmi, ed alle piramidi; dunque ſi può congetturare, che le piramidi, che hanno la medeſima baſe, e

la

la medesima altezza, hanno la medesima solidità.

XXX.

Le seguenti riflessioni confermeranno questa congettura,

Fig. IV., eV. Sieno ABCDE, *abcde* due piramidi, delle quali le altezze AH, *ah* sieno le medesime, e le basi sieno due figure uguali, per esempio, due quadrati uguali BCDE, *bcde*: se uno s'immagina, che queste due piramidi sieno divise per una infinità di piani paralleli alle loro basi, si immaginerà facilmente, che queste sezioni di piramidi daranno de'quadrati eguali IKLM, *ikhm*, e conseguentemente che le due piramidi possono essere riguardate, come delle somme di un medesimo numero di sezioni, le quali in queste due piramidi saranno uguali ciascuna alla

alla ſua corriſpondente. Dunque ſi concluderà, che la ſomma delle ſezioni è la medeſima da una parte, e dall' altra; cioè a dire, che le due piramidi hanno la medeſima ſolidità.

Se le baſi delle due piramidi foſſero altri poligoni regolari, o irregolari BCDEF, *bcdef* eguali tra loro, non vi è neſſuno, che non credeſſe, che tutte pure le ſezioni IKLMN, *iklmn* dell' una, e dell' altra di queſte due piramidi doveſſero tra loro eſſere eguali, e che per conſeguenza non conchiudeſſe, che le piramidi ſarebbero le medeſime, allorchè hanno la medeſima baſe, e la medeſima altezza. FIG. VI., e VII.

XXXI.

Tutto queſto è facile ad immaginare dopo la dimoſtrazione, che noi abbiamo dato dell' ugualità de' pri-

prismi, che hanno la medesima altezza: contuttociò la similitudine tra qualunque sezione IKLMN di una piramide, e la base BCDEF, e l'ugualità delle sezioni IKLMN, e *iklmn* sono di quelle proposizioni, che ancorchè sensibili ad ognuno, hanno rigorosamente bisogno di dimostrazione: e per trovare questa vi è di bisogno di entrare in più considerazioni sulla similitudine delle figure solide.

XXXII.

Riprendiamo la piramide ABCDEF, e supponendola divisa per un piano IKLMN, parallelo alla base, dimostreremo, che la sezione, ovvero la divisione formata per questo piano nella piramide è un poligono perfettamente simile al poligono BCDEF, e che la piramide

Fig. IX.

de AIKLMN è essa medesima perfettamente simile alla piramide ABCDEF, cioè a dire, che gli angoli, che formano tutte le linee di queste due figure, sono respettivamente eguali, e che tutti li lati della piccola piramide avranno il medesimo rapporto tra loro, che quelli della grande.

XXIII.

Cominciamo dall' osservare, che se due piani X, ed Y sono paralleli, FIG. VIII. e che due linee qualunque ALD, AME partendo da un medesimo punto A, traversano questi due piani, le rette LM, DE, le quali congiungono i punti L, M, D, E, saranno parallele, la ragione si è, che se queste due linee non fossero parallele, si rincontrerebbero in qualche parte, essendo prolungate: ma se

ſe ſi rincontraſſero i piani, ne' quali eſſe ſono, e da' quali non poſſono partire, eſſi pure prolungati, quanto ſarà neceſſario, ſi rincontreranno. Dunque non ſarebbero più paralleli, come ſi ſuppone.

XXXIV.

Suppoſto dunque, che il piano IKLMN ſia parallelo al piano
Fig. VI. BCDEF, ne ſeguirà, che tutte le linee ML, LK, KI, IN, NM ſaranno parallele alle linee ED, DC, CB, BF, FE, e conſeguentemente, che li triangoli ALM, AKL, AIK &c. ſaranno ſimili alli triangoli ADE, ACD, ABC &c. Se uno prende l'uno de' lati di queſti triangoli, per eſempio, AM per comune miſura, ovvero per ſcala di tutti li lati della piccola piramide, mentre che il lato corriſpondente AE ſervirà

virà di ſcala a' lati della grande, ſi vedrà facilmente, che i lati ML, LK, KI &c. del poligono IKLMN ſono proporzionali a' lati ED, DC, CB&c. del poligono BCDEFG.

Si vedrà ancora facilmente, che tutti gli angoli IKL, KLM &c. ſaranno reſpettivamente eguali agli angoli BCD, CDE, poichè li priſmi ſaranno formati da linee parallele a' lati de' ſecondi. Dunque li due poligoni IKLMN, BCDEF, ſaranno ſimili.

XXXV.

Tra i lati AM, AL, AK &c., eſſendo proporzionali a' lati AE, AD, AC &c., e gli angoli ALM, ALK &c. reſpettivamente eguali agli angoli ADE, ADC &c. a cauſa della ſimilitudine de' triangoli ALM, ADE, ALK, ADC &c.,

le

le due piramidi AIKLMN, ABCDEF, ſaranno intieramente ſimili.

XXXVI.

Finalmente ſe uno tira dal punto A, AH perpendicolare al piano, ſul quale è fatto il poligono BCDEF, e che Q ſia il punto, ove queſta perpendicolare incontra il piano del poligono IKLMN, egli è chiaro, che le rette AQ, AH, altezze delle due piramidi AIKLMN, ABCDEF, ſaranno tra loro nella medeſima ragione, che i lati omologhi AM, AE, AL, AD &c., ovvero, quello, che torna allo ſteſſo, che ſe uno prende le altezze AQ, AH, per le ſcale delle due piramidi, i lati AM, AL&c. conterranno altrettante parti di AQ, che i lati AE, AD &c. contengono di parti di AH.

XXXVII.

XXXVII.

Se ſi torna ora a conſiderare le due piramidi ABCDEF *abcdef*, ſi vedrà, che le due ſezioni IKLMN, *iklmn* eſſendo ſimili alle baſi BCDEF, *b c d e f*, che ſono le medeſime, ſaranno ſimili tra loro. Si vedrà di più, che queſte due ſezioni ſaranno uguali fra loro, poichè le ſcale di queſte due figure ſono le rette uguali AQ, *aq*, altezze delle piramidi AIKLMN, *aiklmn*. Fig. VI., e VII.

Dunque, ſenza conoſcere la ſolidità delle piramidi, ſi sà di già con certezza, che ſe eſſe hanno la medeſima altezza, e la medeſima baſe, ſono uguali, come noi l'abbiamo congetturato (Art. XXIX.) Le piramidi, che hanno la medeſima baſe, e la medeſima altezza, ſono uguali.

XXXVIII.

Se le baſi di due piramidi in luogo di eſſere le medeſime, ſaranno Due piramidi ſono pure uguali, ſe avendo la me-

 de-

deſma altez-za le loro ba-ſi, non eſſen-do poligoni ſi-mili, ſono e-guali nella ſuperficie.

ſolamente uguali nella ſuperficie, le piramidi ſaranno ancora eguali in ſolidità: perchè ſieno *abcdef*, e *arſt* due piramidi, che hanno la medeſima altezza *ah*, ſe noi dividiamo queſte due piramidi per un piano qualunque parallelo alla baſe, egli è evidente, che l'iſteſſa proporzione avrà l'area *iklmn* all'area *bcdef*, che l'area *uxy* all'area *rſt*; poichè *iklmn*, *bcdef* eſſendo (1. Part. Artic.XXXIV.) figure ſimili, non differiſcono (1. Part. Art. XLVIII.) che per le loro ſcale *aq*, *ah* &c.; e così le figure *uxy*, *rſt*, eſſendo parimente ſimili; non differiſcono eſſe pure, che per le loro ſcale, che ſono ancora le linee *aq*, *ah*.

FIG. VII., e XI.

Ma ſe le baſi *rſt*, *bcdef* ſono eguali in ſuperficie, le loro parti proporzionali *uxy*, *iklmn*, ſono ugua-

uguali: dunque tutte le ſezioni delle due piramidi *arſt*, *abcdef* avranno la medeſima eſtenſione: dunque tutte eſſe inſieme, cioè a dire le piramidi medeſime ſaranno eguali in ſolidità.

XXXIX.

Le piramidi, che hanno la medeſima altezza, ſono tra loro, come le loro baſi.

Se la baſe *bcdef* della prima piramide contiene un numero determinato di volte la baſe *rſt*, la ſolidità della prima piramide *abcdef* conterrà il medeſimo numero di volte la ſolidità della ſeconda *arſt*.

Perchè in queſto caſo la baſe *bcdef* eſſendo diviſa in più parti, delle quali ciaſcuna ſia uguale alla baſe *rſt*, ſi potrà concepire la piramide *abcdef*, come compoſta di più altre piramidi, che abbiano per baſi le parti di *bcdef*. Or ciaſcuna di queſte nuove piramidi ſarà uguale

alla ſeconda piramide *arſt*, ſecondo che noi l'abbiamo provato nell'Articolo precedente: dunque &c.

Che ſe la baſe *rſt*, non veniſſe eſattamente contenuta nella baſe *bcdef*; ma aveſſero queſte baſi una miſura comune X, ſi doveva ciaſcuna di queſte due baſi *bcdef*, *rſt* dividere in parti uguali ad X, e ſi ſarebbe veduto, che le due piramidi *abcdef*, *arſt* erano compoſte di piramidi tutte tra loro eguali tante, quante le due baſi contenevano parti eguali di X, dunque le piramidi *abcdef*, *arſt* ſaranno tra' loro, come le loro baſi.

E ſe le baſi foſſero incommenſurabili, ſi farebbe ſempre vedere, malgrado ancor di queſto, che le piramidi ſarebbero tra loro nella me-

medesima ragione, che le loro basi, servendosi di una introduzione simile a quella, che abbiamo usata in un simil caso (2. Part. Articolo XXVIII.) allorchè si trattava di paragonar le figure, che avevano i lati incommensurabili; cioè a dire, che si diminuerebbe all'infinito la misura X di maniera, che si potesse pigliare per misura comune tanto della base *rst*, che della base *bcdef*.

X L.

Avendo scoperto, che le piramidi, le quali hanno la medesima altezza, sono nella medesima ragione delle loro basi, subito uno si accorge, che la misura della loro solidità, non ha gran difficoltà.

Perchè non si tratta più, che di saper misurare una sola piramide FIG. X., e XI.

per misurare tutte le altre. Supponghiamo, per esempio, che noi sappiamo misurare la piramide ABCDE, e che si domandi la misura della piramide ASTVXY, che non ha nè la medesima base, nè la medesima altezza della prima, noi cominceremo dal fare una piramide simile alla piramide ABCDE, e che ha l'altezza della piramide ASTVXY, ciò che sarà facile: perchè basterà (Articolo xxxv.) prolungare i lati AB, AC, AD, AE, e tagliarli col piano LMNO, di cui la distanza AG fino alla sommità A, sia uguale all'altezza AQ.

Questo fatto, poichè per la supposizione fatta noi sappiamo misurare la piramide ABCDE, egli è evidente, che noi sapremo misura-

re

re pure la piramide ALMNO, che le è ſimile. Perchè qualunque ſieno le operazioni, per le quali ſi miſura la piramide ABCDE, ſi potrà ſempre fare le medeſime operazioni per miſurare la piramide ſimile ALMNO, ſoltanto che ſi adopri in queſta una differente ſcala.

Supponendo dunque, che la piramide ALMNO ſia miſurata, la ſua miſura determinerà quella della piramide propoſta ASTVXY: perchè per l'Articolo precedente queſte due piramidi ſono tra' loro, come le loro baſi LMNO, STVXY, e noi abbiamo inſegnato nella ſeconda parte a trovare il rapporto di queſte due baſi.

XLI.

Poichè dunque non ſi tratta, che

di misurare una sola piramide per saper misurare tutte le altre piramidi immaginabili, proponghiamocene una semplicissima, che si può formare, tirando da quattro angoli A, B, C, H, d'una faccia di un cubo ABCDEFGH, quattro linee al punto O, centro di questo cubo, cioè a dire al punto in egual distanza posto da A, D, B, E &c.

FIG. XII.

Si vede subito, che questa piramide è la sesta parte del cubo, poichè si può il cubo risolvere in sei piramidi uguali, prendendo ciascheduna sua faccia per base. Ora il valore del cubo è il prodotto dell' altezza AF per la base ABCH. Dunque per avere il valore della piramide, bisognerà il prodotto di AF per ABCH partire in sei parti

ti uguali; ovvero, quello, che torna allo ſteſſo, biſognerà moltiplicare la ſeſta parte dell'altezza AF, per la baſe ABCH, e come la ſeſta parte dell'altezza AF, è il terzo della altezza OL della piramide OABCH, poichè la ſua altezza OL è la metà del lato del cubo, ne ſegue, che la miſura della piramide OABCH è il prodotto del terzo della ſua altezza per la baſe.

XLII.

Supponendo ora, che s'abbia a miſurare una piramide qualunque OKMNSTV, ſi immagini un cubo, di cui il lato AB, o AF ſia doppio dell'altezza OL della piramide propoſta, e ſi concepiſca dentro queſto cubo una piramide OABCH, la punta di cui ſia al centro, e che abbia per baſe una delle facce ABCH del FIG. XIII.

del cubo. Queſta nuova piramide avrà la medeſima altezza della prima, e per conſeguenza (Articolo XXXIX.) la ſolidità di OABCH, ſarà a quella di OKMNSTV, come la baſe A B C H alla baſe KMNSTV: ora per l'Articolo precedente il prodotto del terzo dell'altezza comune OL per la baſe ABCH è il valore della piramide OABCH: dunque il prodotto del terzo della medeſima altezza comune OL per la baſe KMNSTV ſarà il valore della piramide propoſta OKMNSTV.

La ſolidità di una piramide qualunque è il prodotto della ſua baſe nel terzo della ſua altezza.

Quindi ſi forma queſto generale Teorema, che una piramide ha per miſura il prodoto della ſua baſe nel terzo della ſua altezza.

XLIII.

XLIII.

Come noi abbiamo veduto (Articolo XXI.), che la ſolidità di un priſma è il prodotto della baſe per la ſua altezza, egli è chiaro per l'Articolo precedente, che le piramidi ſaranno ſempre il terzo de' priſmi, che hanno la medeſima baſe, e la medeſima altezza.

La piramide è il terzo del priſma, che ha la medeſima baſe, e la medeſima altezza.

XLIV.

Dopo aver miſurato tutti i ſolidi terminati da ſuperficie piane, cerchiamo ora la maniera di miſurare i terminati da ſuperficie curve. E ſiccome noi nella terza parte non abbiamo trattato, che delle figure, di cui il contorno non contiene altre curve, che il circolo; noi non eſamine-

mineremo, che i capi, di cui le curvature ſono circolari.

Nell'eſame di queſti corpi noi avremo due objetti, la miſura delle loro ſuperficie, e quella della ſolidità: Perchè eſſendo queſte ſuperficie o intieramente curve, o in parte piane, e in parte curve, noi non potremo richiamare la loro miſura alla prima parte, ſiccome noi abbiamo fatto quanto a i corpi terminati da ſuperficie piane.

XLV.

TAVOLA XIII. FIG. I., e II. Il cilindro è un ſolido teminato da due baſi oppoſte, e parallele, che ſono circoli uguali, e da un piano piegato intorno le loro circonferenze

Il più ſemplice di tutti i ſolidi curvilinei è il cilindro. Queſto è un corpo, come ABCDEF, di cui le due baſi ABC, DEF, ſono due circoli uguali congiunti con una ſuperficie curva, che ſi può immaginare formata da un piano pie-

piegato attorno alla loro circonferenza.

Allorchè due circoli ſono collocati in maniera, che il centro G del primo corriſponde perpendicolarmente ſopra al centro H del ſecondo, il cilindro ſi chiama retto. Fig. I.

Si divide in ciljndro retto, e in cilindro obliquo.

Il cilindro ſi chiama al contrario obliquo, allorchè la linea tirata per i due centri G, e H è obliqua riſpetto a' piani ABC, DEF. Fig. II.

XLVI.

La formazione geometrica di queſti ſolidi analoga a quella de' priſmi, e de' paralſelipipedi, di cui ſi è parlato (Articolo XVII.) conſiſte a far muovere un circolo parallelamente a ſe ſteſſo in modo, che tutti i ſuoi punti deſcrivano linee ret-

Formazione del cilindro.

rette parallele, che si alzino fuori del piano di questo circolo.

XLVII.

Si potrà misurare nella seguente maniera la superficie di un cilindro retto: ciò, che spesso è necessario di fare per la proprietà.

FIG. I. Le due circonferenze ABC, DEF, essendo ciascuna divisa nel medesimo numero di parti eguali, sicchè i punti di divisione di sotto corrispondano agli altri di sopra, si tirino delle linee rette, che congiungano gli angoli corrispondenti de' due poligoni regolari, che dà questa operazione. Egli è chiaro, che si avrà allora un prisma, la superficie del quale sarà composta di altrettanti rettangoli compresi nella superficie del cilindro, quanto vi ha di lati compresi in ciascuna

ſcuna di queſte circonferenze ABC, DEF. Ora ciaſcuno di queſti rettangoli avendo la loro altezza uguale ad AD, la lor miſura totale ſarà il prodotto dell'altezza AD per la ſomma di tutte le baſi, cioè a dire pel contorno del poligono compreſo o iſcritto dentro il circolo DEF, ovvero ABC.

Ma ſiccome a miſura, che il numero de' lati di queſto poligono ſarà grande, il contorno del poligono ſi approſſimerà ſempre più alla circonferenza, e la ſuperficie del priſma a quella del cilindro; ne ſegue, che ſe uno s'immagina, che il numero de' lati di queſto poligono diventi infinito, il priſma non ſarà più differente dal cilindro. Dunque la ſuperficie curva del cilindro retto è uguale ad un rettangolo, di cui l'altezza ſarà AD,

La ſuperficie curva di un cilindro retto è uguale a un rettangolo, che ha la me-

de-

desima altezza, e di cui la base è uguale alla sua circonferenza

AD, e la base una linea retta uguale alla circonferenza DEF.

Questa proposizione può servire a trovare, per esempio, quanta stoffa è necessaria per coprire una colonna cilindrica, o per parare al di dentro una Torre tonda.

XLVIII.

Quanto alla superficie del cilindro obliquo, non si può misurare nella medesima maniera: perchè in luogo di rettangoli si troverà de' parallelogrammi di diversa altezza. Solo per via di metodi involuti, e difficili si è arrivato a conoscere il valore approssimato di tali superficie; ed i problemi di questo genere non sono da elementi.

XLIX.

Riguardo alla solidità de' cilindri o ret-

o retti, ovvero obliqui, si trova facilissimamente. Perchè egli è evidente, che tutto quello, che noi abbiamo detto de' prismi, converrà a' cilindri, se si riguardono i cilindri, come gli ultimi prismi, che si può loro inscrivere.

E così i cilindri, che avranno la medesima base, e la medesima altezza, saranno eguali in solidità.

I cilindri, che hanno l'istessa base, e altezza, sono eguali in solidità.

L.

E la misura di un cilindro qualunque sarà il prodotto della sua base per la sua altezza.

La misura di un cilindro qualunque è il prodotto della sua base per la sua altezza.

L I.

Il cono è il più semplice solido de' curvi dopo il cilindro; questo è una figura, come ABCDE, che ha per base un circolo, ed ha la superficie com- FIG. III., e IV.

Il cono è una ſpecie di piramide, che ha per baſe un circolo.

poſta di una infinità di linee rette, che vengono tutte dalla ſommità A alla circonferenza BCDE di queſto circolo. Si può riguardar queſto ſolido, come una piramide, che ha per baſe un circolo.

LII.

Si diſtingue in cono retto, e in cono obliquo.

Se, come nella Figura III., la punta, o ſommità A del cono corriſponde perpendicolarmente ſopra il centro O della baſe, il cono è chiamato retto; ſe la ſommità corriſponde a un punto differente dal centro della baſe, Fig. IV., è chiamato obliquo.

LIII.

Per miſurare la ſuperficie di un cono retto ABCDE, ſi riguarderà, come l'ultimo delle piramidi, che li ſi poſſono iſcrivere; cioè a dire, ſi di-

FIG. III.

divida la circonferenza della ſua baſe BCDE, come ſi è fatto della circonferenza del cilindro in una infinità di piccoli lati, e tirando delle linee da tutti gli angoli alla ſommità del cono A, ſi troverà, che la ſuperficie conica è un' ammaſſo di una infinità di piccoli triangoli iſoſceli, l'altezza de' quali è uguale al lato AB del cono, e de' quali tutte le baſi inſieme unite ſono eguali alla circonferenza BCDE; di dove è facile il vedere, che la miſura di queſta ſuperficie ſi troverà moltiplicando la metà di AB per la circonferenza BCDE.

La ſuperficie di un cono retto ſi miſura moltiplicando la metà del ſuo lato per la circonferenza della ſua baſe.

L I V.

Se uno ſi ricorda, che la ſuperficie di un ſettore di queſto circolo è uguale (111. Part. Art. x.) al prodotto dell'

arco di queſto ſettore per la metà del raggio, ſi vedrà, che per coprire il cono retto ABCDE d'una ſuperficie, che ſi pieghi, come di cartone &c. biſognerà prendere un ſettore di circolo, il raggio del quale ſia eguale ad AB, e l'arco alla circonferenza BCDE.

Un ſettore di circolo è la ſuperficie ſvoltolata di un cono.

L V.

Allorchè il cono è obliquo, la miſura della ſua ſuperficie, come quella del cilindro obliquo, è aſſai difficile a trovare anco d'una maniera approſſimata, e queſto pure è un problema, che non ha luogo negli Elementi.

L V I.

Quanto alla ſolidità de' coni o retti, ovvero obliqui, ſi riguarderanno

no queſti, come le ultime piramidi, che ſi poſſano loro inſcrivere, e per conſeguenza ſi potrà loro applicare quel, che ſi è detto delle piramidi in generale.

E così i coni, che hanno la medeſima baſe, e la medeſima altezza, ſono uguali.

I coni, che hanno l'iſteſſa baſe, ed altezza, ſono uguali.

LVII.

E la ſolidità di un cono qualunque ſarà il prodotto della baſe pel terzo della ſua altezza.

La lor miſura è il prodotto della baſe pel terzo della altezza.

LVIII.

Vien qualche volta il biſogno di miſurare un corpo, come BCDEFGH, che ſi chiama cono troncato, cioè la parte, che reſta di un cono AFGH, allorchè ſe ne leva un' altro cono più piccolo ABCDE per una ſezione

Fig. V. a VI.

parallela alla baſe FGH. Egli è evidente, che la miſura di queſto ſolido ſarà la differenza tra la ſolidità di due coni ABCDE, AFGH.

LIX.

Quanto alla ſuperficie di un cono troncato, ſe egli è ſtato formato dalla ſezione di un cono retto, ſi può trovare qualche coſa di più ſemplice, che di miſurare ſeparatamente le ſuperficie de' due coni, e ſottrarne l'una dall'altra. Si impiegherà per ciò ottenere il ſeguente metodo, che è facile ad immaginarſi dopo quello, che già ſi è detto (Articolo LIV.)

Fig. VI., e VII. Supponghiamo, che ALR ſia il ſettore, che biſogna coſtruire per potere coprire il cono AFGH, ſe ſi deſcriva dal centro A coll' interval-

lo

lo AM eguale ad AB un'arco MP, egli è chiaro, che lo ſpazio MPRL, ſarà una porzione di circolo, capace a coprire la ſuperficie cercata del cono troncato. Ora ſe uno s'immagina, che le due circonferenze, delle quali MP, ed LR ſono archi ſimili, ſieno finite, ſi avrà un circolo intiero, la miſura del quale (3. Part. Art. VIII.) ſarà il prodotto di ML eguale a BF, per la circonferenza, di cui AN è il raggio, eſſendo N il mezzo di ML. Dunque la porzione del circolo MPRL, ovvero la ſuperficie del cono troncato BCDEFGH, che gli è eguale, ſi muſurerà moltiplicando ML, per l'arco NQ, ovvero quel, che torna all'iſteſſo, moltiplicando BF, per la circonferenza IKL, che dà la ſezione del ſolido propoſto per un piano parallelo al-

Maniera di miſurare la ſuperficie di un cono troncato.

la baſe, e che paſſa per il mezzo del lato BF.

LX.

La sfera è un corpo, la superficie del quale ha tutti i punti egualmente distanti dal centro.

L'ultimo de' corpi ſolidi, de' quali noi tratteremo, ſi chiama sfera, ovvero globo; cioè quello, la ſuperficie del quale ha tutti i ſuoi punti egualmente diſtanti da un medeſimo punto, che n'è il centro. Speſſo occorre di miſurare queſta ſuperficie; per eſempio, ſi vorrà ſapere, quanto vi vorrà di doratura per una palla; quanto di piombo per una cupola &c.

LXI.

Fig. VIII.

Sia X la sfera, di cui ſi ha da miſurare la ſuperficie, egli è evidente, che ſi può concepire queſto ſolido, come prodotto dalla rivoluzione di un ſemicircolo AMB attorno al ſuo diametro AB.

Sup-

Supponghiamo, che in luogo della mezza circonferenza, noi abbiamo un poligono regolare di un numero infinito di piccoli lati, o ſe uno vuole, di un grandiſſimo numero di lati, e ſi voglia miſurare ſolamente la ſuperficie Z prodotta dalla rivoluzione di queſto poligono. Sarà facile di paſſare alla miſura delle ſuperficie della sfera, ſiccome noi ſiamo paſſati dalla miſura delle figure rettilinee a quella del circolo.

LXII.

Per miſurare la ſuperficie del ſolido Z, eſaminiamo la piccola parte di queſta ſuperficie, che produce un ſolo lato qualunque M *m* del poligono inſcritto, mentre che egli gira attorno il diametro AB. Egli è evidente, che queſto lato M *m* deſcrive

in

in queſto movimento una ſuperficie del cono tronco V. Perchè prolungando la retta *m* M, finochè ella rincontra in T il diametro, ovvero aſſe della rivoluzione AB, ſe queſta linea TM*m* gira nel tempo medeſimo, che il ſemicircolo AMB, deſcriverà manifeſtamente un cono retto, la ſommità del quale ſarà T, e la baſe il circolo deſcritto dal punto *m*; in maniera, che la ſuperficie V prodotta dal muoverſi M *m* ſarà una ſezione di queſto cono, compreſo tra i piani de' circoli, che i punti M, e *m* girando deſcrivono. Ma, ſecondo che noi abbiamo veduto (Art. LIX.) la ſuperficie V è uguale a un rettangolo, che ha per altezza M *m*, e per baſe una linea eguale alla circonferenza KLO deſcritto dal punto K, mezzo di M *m*. Dunque la ſuperficie pro-

Tavola XIV. Fig. I.

prodotta dalla revoluzione del poligono è uguale alla ſomma di altrettanti rettangoli di queſta natura, quanti vi ha lati in queſto poligono, come M *m*.

Or come tutti i lati M *m*, altezza di queſti rettangoli, ſono ſuppoſti eguali, ſi potrà riguardare la ſuperficie cercata, come un rettangolo totale, che avrà l'altezza M *m* con una baſe uguale alla ſomma di tutte le circonferenze, come K L, cioè deſcritte da' punti di mezzo di ciaſcuno piccol lato.

Ma il poligono iſcritto nel ſemicircolo A M B, avendo un grandiſſimo numero di lati, la piccolezza dell'altezza M *m*, e la grandezza eccеſſiva della baſe rendono queſto rettangolo impoſſibile a coſtruirſi.

Per rimediare a queſto inconvenien-

niente, è facile d'immaginarsi tutti questi piccoli rettangoli mutati in altri, che abbiano sempre la medesima altezza, non impercettibile, come M *m*, ma assai grande, purchè ciascuna delle basi diventi assai piccola; facendo questo l'addizione di tutte queste piccole basi, farà una lunghezza paragonabile all'altezza.

LXIII.

Vediamo dunque, se noi possiamo in questo modo cangiare i nostri piccoli rettangoli. Ponghiamo per rendere semplice il problema, che i nostri rettangoli in luogo di aver per basi linee uguali alle circonferenze KL, non abbiano per basi, che li raggi KI di queste circonferenze. Non sarà allora difficile di applicarle quel, che

Fig. II.

che abbiamo trovato per queſti ultimi rettangoli, a quelli, de' quali noi dobbiamo parlare.

Si tratta dunque di trovare un rettangolo, che abbia per miſura il prodotto di M *m* per KI; e che abbia per altezza qualche linea incomparabilmente più grande, che M *m*, e che ſia la medeſima in qualunque luogo ſia collocato queſto piccolo lato M *m*. Scegliamo, per eſempio, la retta CK, che è l'apotema del poligono, del quale M *m* è il lato, e che per conſeguenza è ſempre il medeſimo a qualunque lato del poligono, che egli appartenga. Noi dobbiamo dunque cercare una linea, di cui il prodotto per CK ſia eguale al prodotto di KI per M *m*; cioè a dire (2. Part. Art. VII.) biſogna trovare una quarta proporzionale alle tre linee KC, KI, M *m*.

M *m*. Ora noi ſappiamo, che per mezzo de' triangoli ſimili, ſi trova nelle figure delle linee proporzionali. Biſogna dunque formare de' triangoli ſimili, ne' quali i lati omologhi ſieno le linee, che ſi cercano; ciò che ſi farà calando MR perpendicolare a *mp*. Si avrà allora i triangoli M*m*R, KIC ſimili; perchè ſarà ciaſcuno rettangolo, l' uno in R, l'altro in I, e di più gli angoli *m*MR, IKC ſaranno uguali tra loro, perchè il primo fa un' angolo retto coll' angolo M*m*R uguale all'angolo MKI, e l'altro IKC fa pure un retto coll'angolo MKI.

Di là ſi può facilmente concludere, che KC è a KI, come M *m* a MR, cioè a dire MR è la quarta proporzionale cercata; o quello, che è il medeſimo, che il rettangolo di

KC

KC per MR, o per P*p* è uguale al rettangolo di M*m* per KI.

Ma ſiccome il rettangolo, che noi volevamo mutare, non era quello di M*m* per KI, ma di M*m* per la circonferenza, di cui KI è il raggio, noi ci ricorderemo quì, che le circonferenze ſono tra loro, come i raggi: quello, che fa, che l'egualità, che è tra 'l rettangolo di M*m* per KI, e quello di P*p* per CK, ne tira neceſſariamente l' egualità del rettangolo di M*m* per la circonferenza di KI al rettangolo di P*p* per la circonferenza di CK. Perchè ſi vede facilmente, che ſe due rettangoli ſono eguali, e conſervando le loro altezze, ſi aumentano proporzionalmente le loro baſi, queſti rettangoli ſeguitano ad eſſere eguali.

LXIV.

LXIV.

Avendo trovato ne' due Articoli precedenti, che tutte le piccole ſuperficie coniche tronche, come V (fig. 1.) ſono eguali ad altrettanti rettangoli, che abbiano tutti per altezza una medeſima retta uguale alla circonferenza, di cui K C ſarà il raggio; e de' quali rettangoli ciaſcuno abbia per baſe una piccola retta P *p* corriſpondente a ciaſchedun lato M *m*, ſe ne ricaverà, che una ſomma qualunque di queſte piccole ſuperficie preſe, per eſempio, da A fino a *p*, ſarà uguale a un rettangolo, che abbia per altezza una retta uguale alla circonferenza di C K, e per baſe la ſomma di tutte le linee tali, quale è P *p*, preſe da A fino a *p*, cioè la retta A *p*.

Dun-

Dunque per avere la ſuperficie totale, prodotta dalla rivoluzione del poligono intero, biſogna fare un rettangolo, di cui la baſe ſia uguale alla circonferenza deſcritta dal raggio C K, e che abbia un' altezza uguale al diametro A B.

L X V.

Riuſcirà ora coſa faciliſſima il miſurare la ſuperficie della sfera. Perchè è chiaro, che più che vi avrà di lati nel poligono, più il ſolido prodotto per la ſua rivoluzione ſi approſſimerà all' eſſer di sfera, e così più l' apotema C K ad eſſere uguale al raggio, in modo, che ſe uno ſi può immaginare, che il poligono ſia diventato un circolo, l' apotema C K ſarà il raggio medeſimo, e la ſuperficie della sfera avrà la medeſima eſtenſione, che un ret-

La ſuperficie della sfera ha per miſura il prodotto del ſuo diamètro per la circonfe-

ferenza del suo circolo maſſimo.

tangolo, del quale l'altezza, e la baſe ſieno l'una il diametro, e l'altra una linea uguale alla circonferenza del circolo, che l'ha prodotto, e che ſi ſuole ordinariamente chiamare il circolo maſſimo della ſfera.

LXVI.

Cosa ſia un ſegmento di ſfera.

Quanto alla ſuperficie curva di un ſegmento di ſfera AMLNO, cioè della parte di ſfera, che viene tagliata, allorchè ſi divide per un piano MLNO perpendicolare al diametro; ella ha per miſura il prodotto della ſua groſſezza, o vogliamo dire del dardo AP per la circonferenza del maſſimo circolo AMBN. La ragione è la medeſima, che quella, colla quale abbiamo provato (Articolo LXIV.) che la ſomma della ſuperficie di tutti i piccoli coni troncati compreſi da A fino a *m* è ugua-

FIG. III.

Come ſi miſura la ſua ſuperficie.

uguale al rettangolo, di cui l'altezza è A p, e la baſe una linea uguale alla circonferenza, di cui CK è il raggio.

LXVII.

La miſura precedente della ſuperficie della ſfera ci moſtra, che ſe uno fa girare il rettangolo ABDE, e nel tempo medeſimo il ſemicircolo AMNB intorno ad AB, la ſuperficie curva del cilindro retto EFGIKDH prodotta per la rivoluzione di queſto rettangolo, ſarà uguale a quella della ſfera deſcritta dal ſemicircolo; ciò che ſi eſprime ordinariamente così; la ſuperficie della ſfera è uguale a quella del cilindro circoſcritto. FIG. IV.

La ſuperficie della ſfera è uguale a quella del cilindro circoſcritto.

LXVIII.

E ſe uno divide tanto il cilindro, quanto la ſfera per due piani qualun-

Le sezioni del cilindro, e della sfera hanno la medesima superficie.

que perpendicolari al diametro AB in P, e in Q, le sezioni della sfera, e del cilindro, che saranno prodotte dal movimento della retta QS, e dall'arco MN, saranno quanto alla superficie uguali.

LXIX.

La superficie della sfera è uguale alla superficie del suo circolo massimo presa quattro volte.

Si vede ancora da quel, che già abbiamo detto, che la superficie della sfera è uguale all'area del suo circolo massimo presa quattro volte. Perchè la superficie di questo circolo ha per misura il prodotto della metà del raggio, o quarta parte del diametro per la circonferenza; e la superficie della sfera è uguale al prodotto del diametro intiero per la medesima circonferenza.

LXX.

Trovata la misura della superficie della sfera è facile di misurare la sua so-

ſolidità: perchè ſi può conſiderare la sfera, come un'infinità di piccole piramidi poſte inſieme, le ſommità delle quali ſono nel ſuo centro, e tutte le baſi cuoprono l'intera ſuperficie. Ora ciaſcuna di queſte piramidi avendo per miſura il prodotto del terzo della ſua altezza, cioè del raggio per la ſua baſe, la loro ſomma totale, o ſolidità della sfera ſi miſurerà moltiplicando il terzo del raggio per la ſua ſuperficie, cioè per l'area del maſſimo circolo preſa quattro volte.

La ſolidità della sfera è il prodotto del terzo del raggio per l'area del maſſimo circolo preſa quattro volte.

LXXI.

Siccome il medeſimo è il dire il prodotto del terzo del raggio per il maſſimo circolo preſo quattro volte, e il prodotto del terzo del raggio preſo quattro volte, cioè di due terzi del diametro pel circolo maſ-

simo; e che la solidità del cilindro EFGIKDH ha per misura il prodotto del diametro pel circolo massimo, che li serve di base, ne segue, che la solidità della sfera è due terzi di quella del cilindro circoscritto.

La solidità della sfera è due terzi di quella del cilindro circoscritto.

LXXII.

Misura della solidità di un segmento di sfera.

FIG. III.

Se uno si propone di misurare la solidità di un segmento di sfera AMLNO, egli è evidente, che bisogna misurare la porzione di sfera prodotta per la rivoluzione del settore CAM; ciò che si farà moltiplicando il terzo del raggio per la superficie del segmento della sfera proposta AMLNO: e insieme si detrarrà da questa misura quella del cono prodotto per la rivoluzione del triangolo CPM, cioè il cono, che ha per base il circolo MLNO, e l'altezza CP;

CP; ed il reſto ſarà il valore dimandato del ſegmento.

LXXIII.

Noi finiremo queſti Elementi con qualche propoſizione ſulla ſolidità, e sù la ſuperficie de' corpi ſimili. Queſte propoſizioni da ſe naturalmente ci ſi preſentano, allorchè ſi riflette sù ciò, che coſtituiſce la ſimilitudine di due corpi. Si può dire ancora, che ſi diſcuoprono dalla analogia, ſe uno riflette a ciò, che abbiamo già detto (1. Part. Articolo XXXIV., e ſeguent.) della ſimilitudine delle figure piane, cioè di quelle, che ſono deſcritte sù de' piani.

Noi abbiamo determinato (Articolo XXXII.) in che conſiſte la ſimilitudine di due piramidi. La definizione da noi allora data delle piramidi ſimili ſi può ſtendere a tutti i

corpi terminati da' lati de' piani: cioè a dire, che due corpi di queſta natura ſaranno chiamati ſimili, ſe tutti gli angoli formati da' lati del primo ſono eguali agli angoli formati da' lati del ſecondo, e ſe i lati d'uno di queſti corpi ſono proporzionali a' lati omologhi dell'altro.

In che conſiſte la ſimilitudine di due corpi terminati da' piani.

LXXIV.

Quanto a' corpi, che non ſono terminati da tutte le bande da' piani, per eſempio, i cilindri, ed i coni, è facile di determinare le condizioni neceſſarie per renderli ſimili.

Condizioni, che determinano la ſimilitudine di due cilindri retti.

Due cilindri retti ſaranno ſimili, ſe le loro altezze ſono nella medeſima ragione, che i raggi delle loro baſi.

LXXV.

Quelle di due cilindri obliqui.

Se i cilindri ſono obliqui, ſarà di più neceſſario, che le linee, le quali congiungono i centri di due circoli,

li, in ciaſcuno di queſti cilindri facciano i medeſimi angoli ſulli piani delle loro baſi.

LXXVI.

Le medeſime definizioni ſi poſſono applicare a' coni, mettendo in luogo della linea, che paſſa per li centri delle due baſi del cilindro, quella, che và dalla ſommità del cono al centro del circolo, che gli ſerve di baſe. Quelle di tre coni.

LXXVII.

Perchè due coni tronchi ſieno ſimili, è neceſſario in primo luogo, che que' coni, de' quali eſſi ſono parte, ſieno ſimili l'uno all'altro; in ſecondo luogo, che le loro altezze ſieno tra loro, come li raggi delle baſi. Quelle di due coni tronchi.

LXXVIII.

Quanto alle ſfere, ſi vede ſubito, che

Le sfere, i cubi, e tutte le figure, che non dipendono, che da una sola linea, sono tutte simili.

che esse sono tutte simili le une all'altre; e così che tutte le figure o solide, o piane, che non hanno bisogno, che di una sola linea per essere determinate, come il circolo, il quadrato, il triangolo equilatero, il cubo, il cilindro circoscritto alla sfera &c.

LXXIX.

In generale i solidi simili non differiscono, che per le scale, sulle quali sono stati costruiti.

In generale si potrà dire delle figure solide simili quello, che si è detto delle figure piane; che esse non differiscono, che per le scale, sopra le quali sono state costruite.

Questo solo, che abbiamo detto, ben considerato conduce a due proposizioni fondamentali sulla superficie, e sulla solidità de' corpi simili.

LXXX.

La prima proposizione c'insegna, che le superficie di due solidi simili

sono

ſono tra loro, come i quadrati de'loro lati omologhi; per eſempio, che vi ha il medeſimo rapporto tra le ſuperficie di due piramidi ſimili z, e Z, che tra' quadrati *abcd*, ABCD fatti ſu' lati *ab*, AB, che ſi riſpondono in queſte due piramidi.

Le ſuperficie de'ſolidi ſimili ſono tra loro, come i quadrati de' loro lati omologhi. FIG. V., e VI.

Per diſcoprire la verità di queſta propoſizione non vi ha biſogno, che de' diſcorſi fatti (1. Part. Articolo XLIII., e XLIV.) cioè a dire, che biſogna ſolamente conſiderare, che ſe P è la ſcala della piramide Z, e *p* la ſcala della piramide ſimile z, le linee, che biſogna impiegare per miſurare la ſuperficie di Z, e quella del quadrato ABCD avranno il medeſimo numero di P, che v'avrà di parti *p* in quelle, di cui ſi deve uno ſervire per miſurare la ſuperficie z, e quella del quadrato *abcd*.

Donde

Donde ne ſegue, che il prodotto delle linee, che entrano nella miſura di Z, e di ABCD darà il medeſimo numero di quadrati X fatti sù P, che il prodotto delle linee preſe a miſurare z, e *abcd* darà di quadrati *x* fatti sù *p*: cioè a dire, che i numeri, che eſprimono il rapporto della ſuperficie della piramide Z al quadrato ABCD, ſaranno i medeſimi, che quelli, che eſprimeranno il rapporto della ſuperficie z al quadrato *abcd*.

Si farà il medeſimo diſcorſo nella comparazione di tutti gli altri corpi ſimili, o ſieno terminati da' piani, ovvero da ſuperficie curve: Perchè le linee impiegate a miſurare le ſuperficie di tutti queſti corpi avranno ſempre il medeſimo numero di parti delle loro ſcale; e per conſeguenza il prodotto di queſte linee

con-

conterrà un medeſimo numero di volte i quadrati di queſte medeſime parti.

E ſe le linee neceſſarie per miſurare la ſuperficie de' corpi ſimili foſſero incommenſurabili, è chiaro, che la dimoſtrazione ſuſſiſterebbe ſempre, purchè quivi ſi impieghino i principj, de' quali ci ſiamo ſerviti (2. Part. Art. XXVIII.) per paragonare inſieme le figure ſimili, delle quali i lati erano incommenſurabili.

LXXXI.

Si proverà nella medeſima maniera, che le ſuperficie delle sfere ſono tra loro, come i quadrati de' loro raggi. Ma per vederlo ancora più chiaramente in un' altra maniera, baſterà ricordarſi, che le ſuperficie de' circoli ſono tra loro, come i quadrati de' loro raggi (3. Parte Arti-

Le ſuperficie delle sfere ſono tra loro, come i quadrati de' loro raggi.

Articolo VI.), e che le ſuperficie delle sfere ſono quadruple de' loro circoli maſſimi (Articolo LXIX.).

LXXXII.

La proporzionalità tra le ſuperficie de' corpi ſimili, ed i quadrati de' loro lati omologhi è sì generale, che ſi può applicare tanto a' corpi, de' quali uno non sà la miſura, che a quelli, di cui la miſura è nota.

Per eſempio, ſenza ſaper miſurare la ſuperficie di un cilindro obliquo, ſi può affermare, che le ſuperficie di due cilindri obliqui ſimili ſono tra loro, come i quadrati de' diametri delle baſi di queſti cilindri. Perchè iſcrivendo dentro queſti due cilindri due priſmi ſimili, di quante facce uno vorrà, ſi vedrà dal detto, che le ſuperficie di queſti priſmi ſaranno tra loro, come i quadrati de' diametri delle

le baſi. Dunque conſiderando i cilindri medeſimi, come li ultimi de' priſmi iſcritti, avranno le loro ſuperficie il medeſimo rapporto.

LXXXIII.

I ſolidi ſimili ſono trà loro, come i cubi de' loro lati omologhi.

La propoſizione fondamentale per la comparazione della ſolidità de' corpi ſimili è queſta quì.

I ſolidi ſimili ſono tra loro, come i cubi de' loro lati omologhi.

Queſta propoſizione ſi può dimoſtrare, come la precedente, conſiderando, che le figure ſimili non differiſcono tra loro, che per le ſcale, ſulle quali ſono ſtate coſtruite.

Per far ciò vedere nella più ſemplice maniera, che ſarà poſſibile, noi ci ſerviremo, per eſempio, di due priſmi ſimili Z, e z, e di due cubi X *x*, i lati de' quali ſono eguali ad AB, *ab*, linee analoghe in queſti due priſmi; FIG. VII. e VIII.

ſmi ; di più prenderemo due ſcale AB, *ab* diviſe in un gran numero di parti per poter miſurare le dimenſioni di queſti ſolidi. Ora ciò poſto, è chiaro, che ſi troverà preciſamente altrettanti cubi fatti ſulle parti di *ab* nel priſma z, e nel cubo *x*, che di cubi fatti ſulle parti di AB nel priſma Z, e nel cubo X.

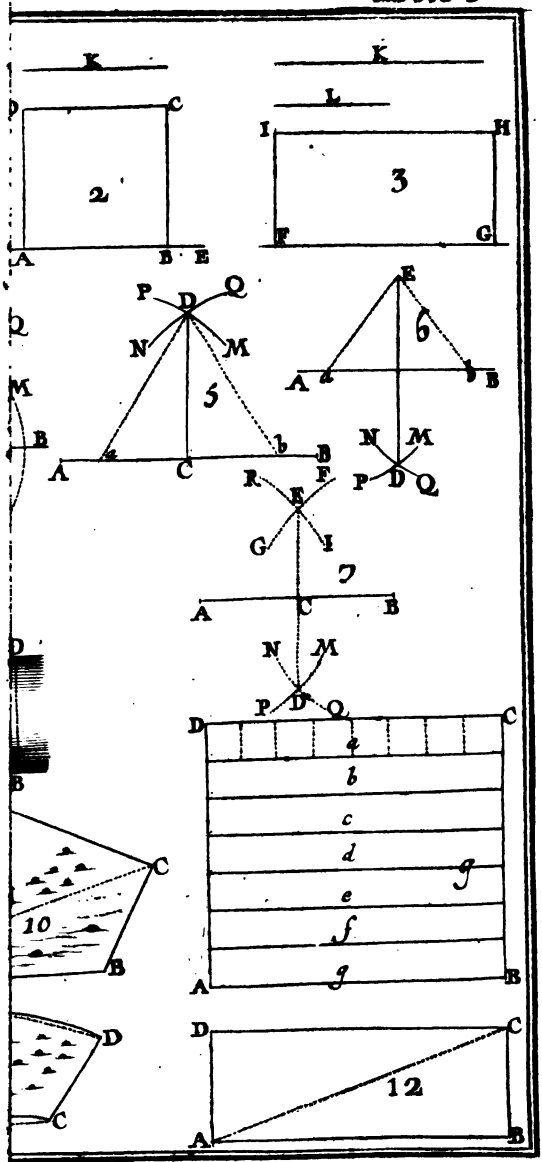
Si farà il medeſimo diſcorſo per tutti gli altri ſolidi, e quelli, che potranno avere delle dimenſioni incommenſurabili, ſaranno nella medeſima ragione, che i cubi de' loro lati omologhi.

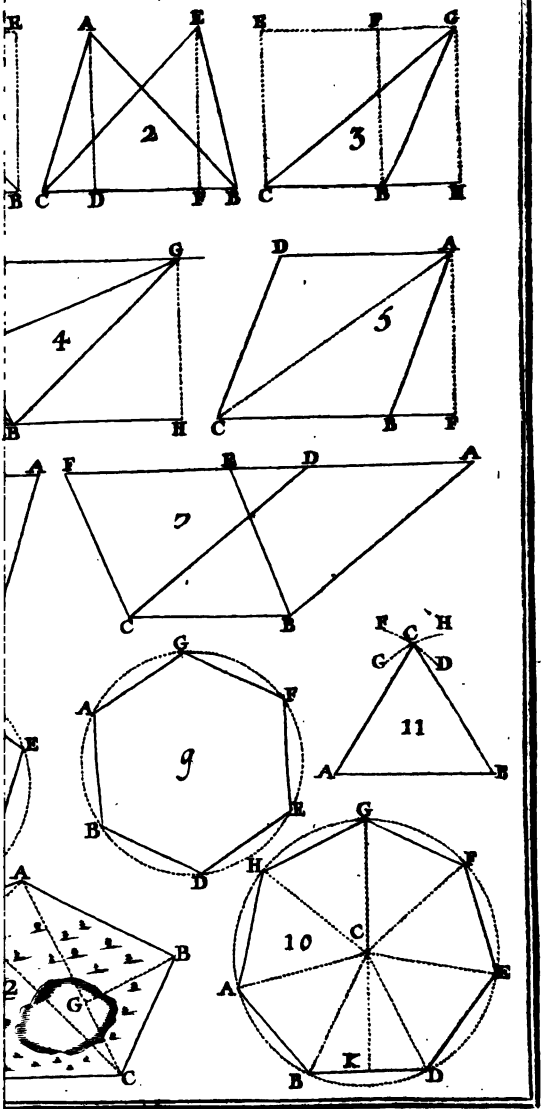
LXXXIV.

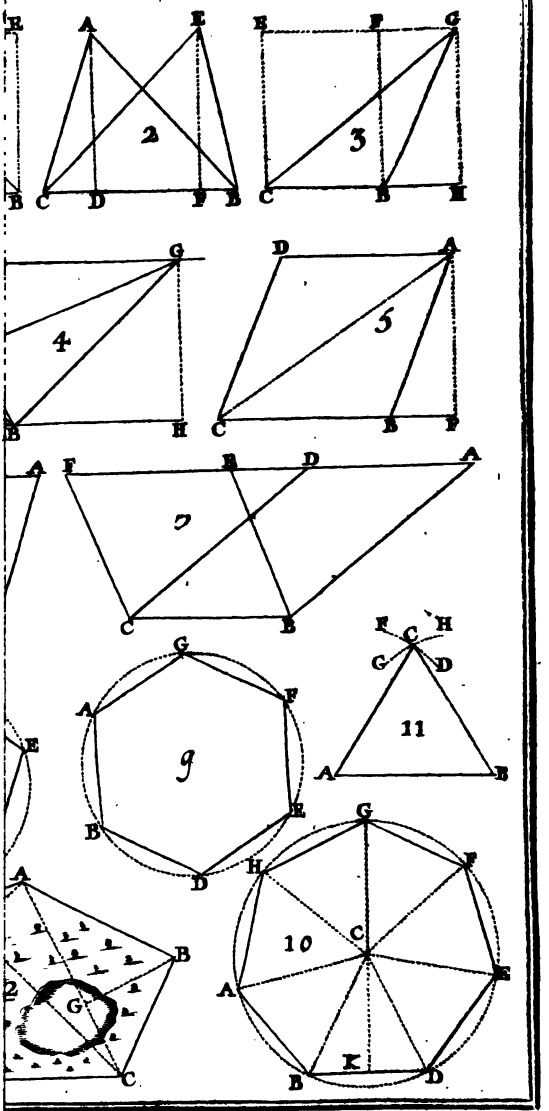
Le sfere ſono tra loro, come i cubi de' loro raggi.

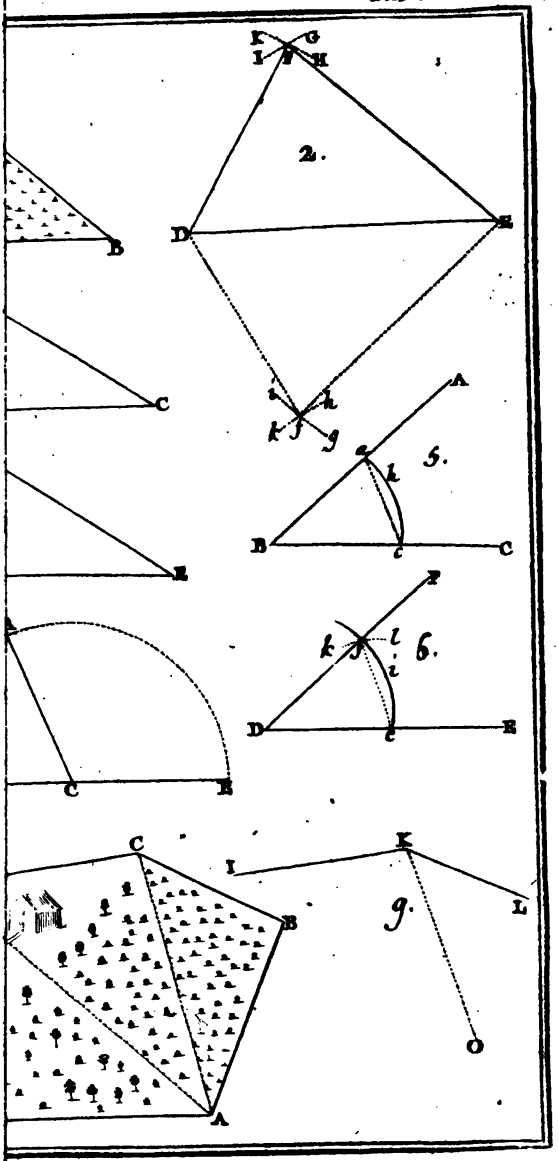
Per dare un eſempio, la ſolidità delle sfere ſono evidentemente tra loro, come li cubi de' loro raggi.

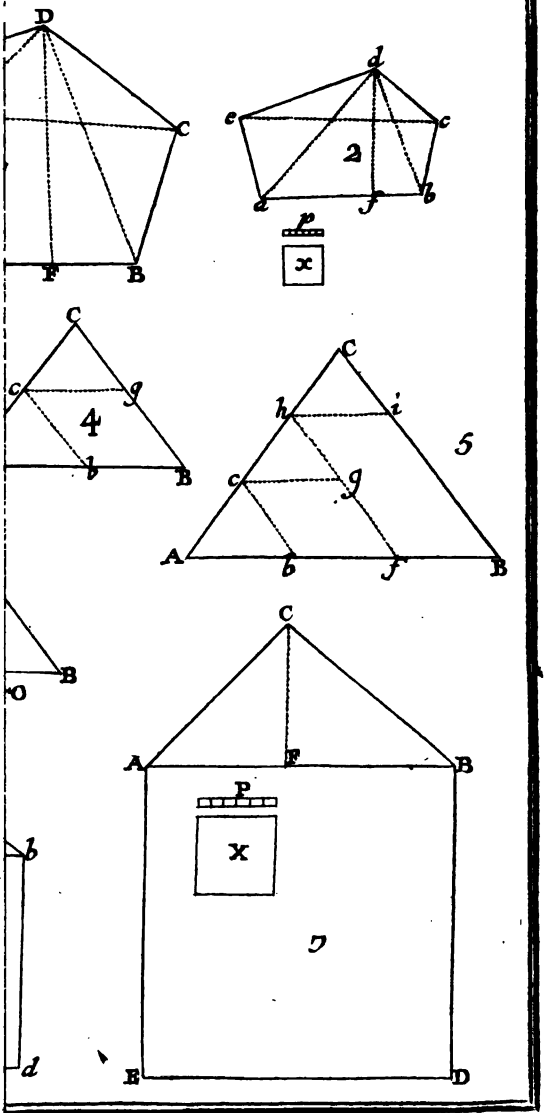
IL FINE.

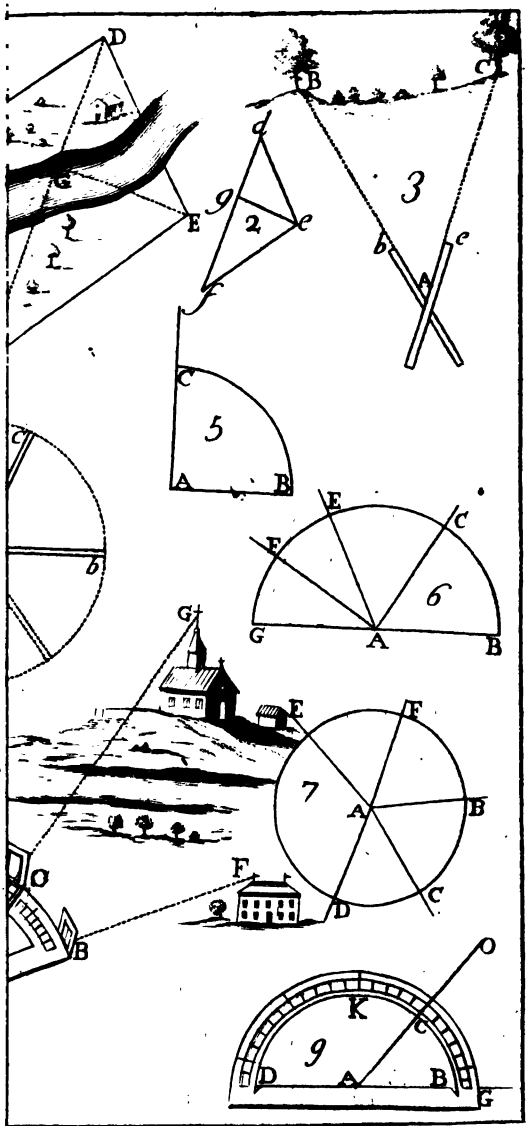

K
C
2
A
B E
K
L
I
H
3
F
G
P
D
Q
N
M
5
M
B
A
C
b
B
E
6
A
a
b
B
N
M
P
D
Q
R
E
F
G
I
7
A
C
B
N
M
P
D
Q
D
C
a
b
c
d
g
e
f
g
A
B
D
B
C
10
B
D
C
D
C
12
A
B

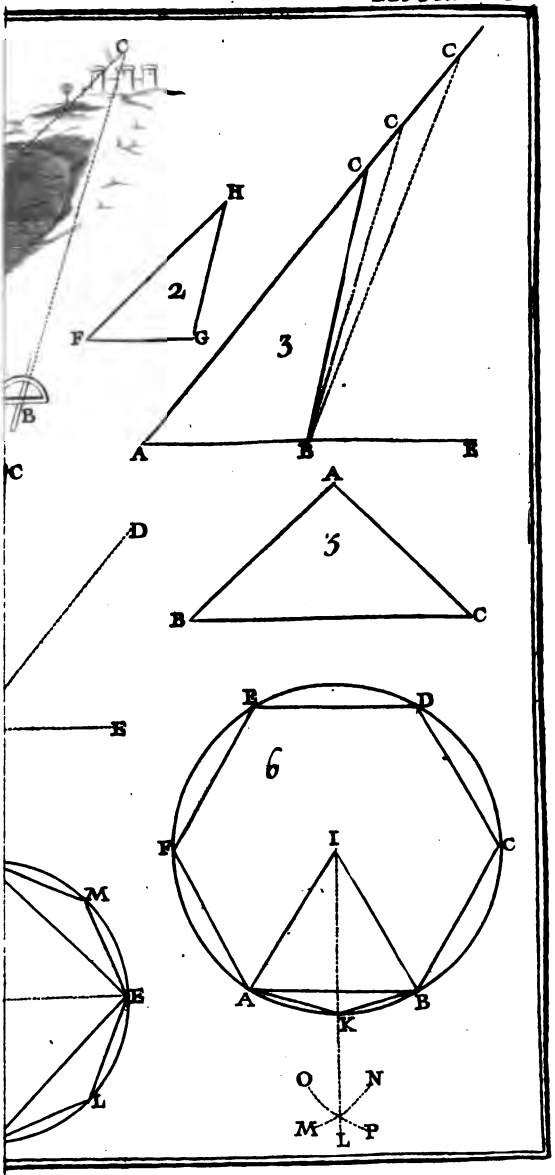

2
3
4
5
7
9
10
11
12

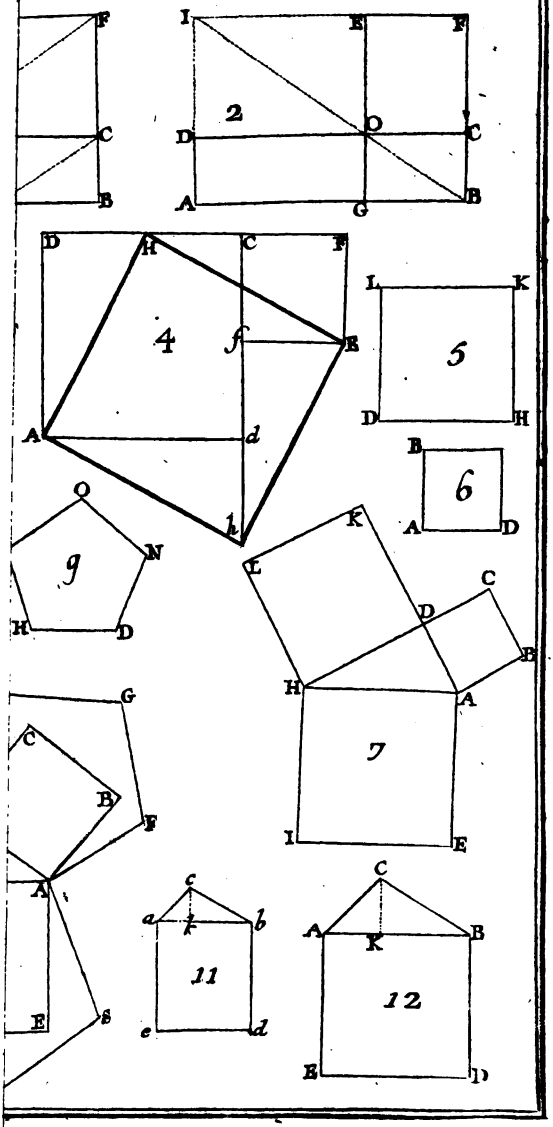

2
3
4
5
7
9
10
11

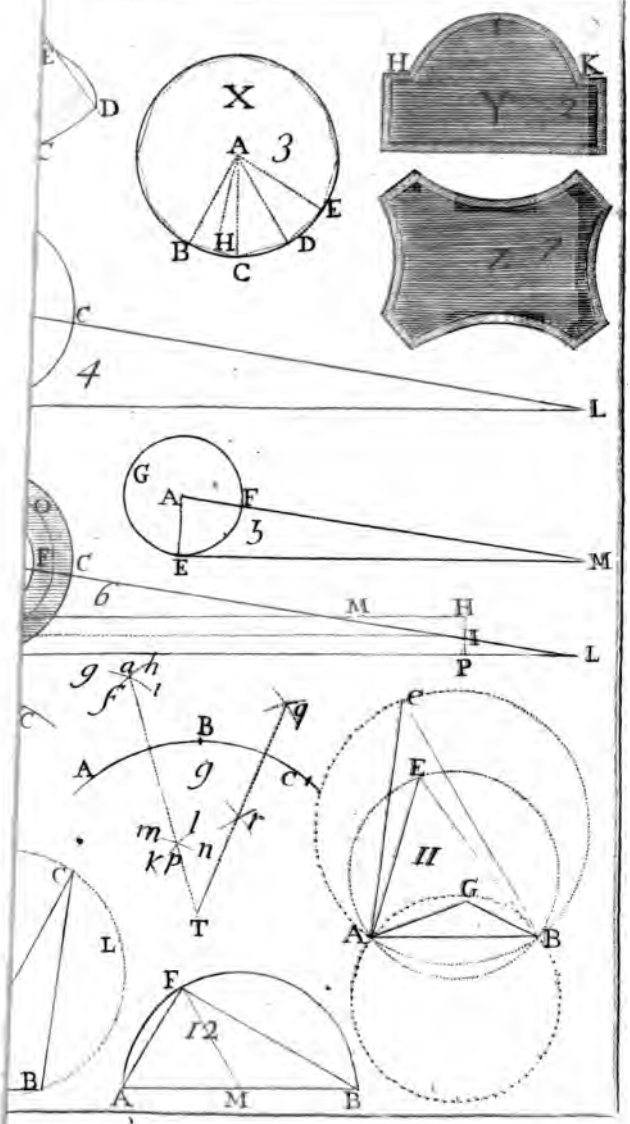

F
G
I
H
2.
D
E
B
C
i
h
k
f
g
A
e
k
5.
B
c
C
F
k
f
l
i
6.
D
c
E
C
E
C
I
K
L
B
9.
O
A

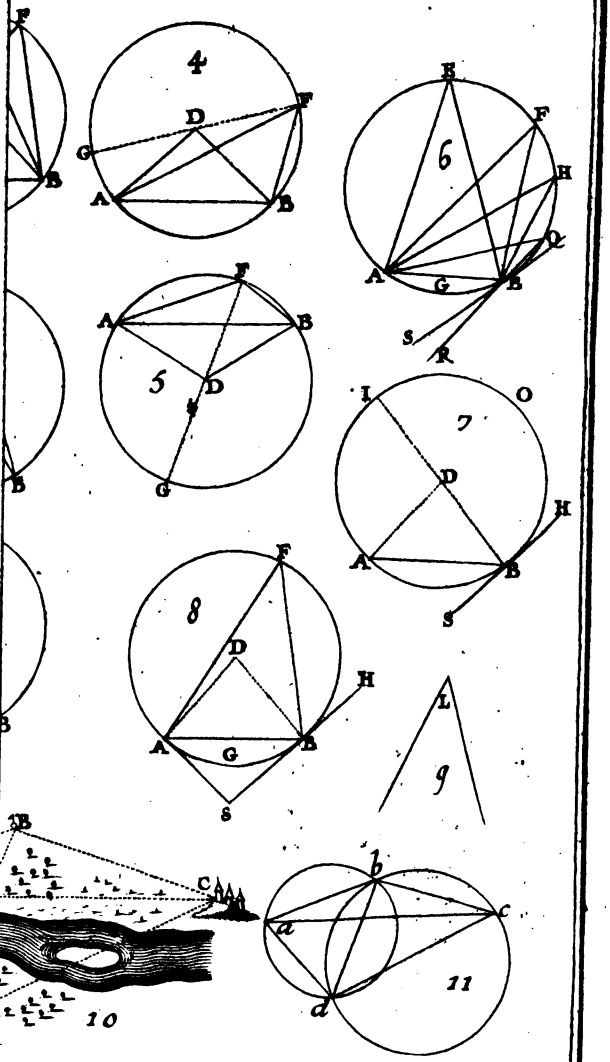

D
C
F
B
d
e
c
2
d
f
b
p
x
C
c
g
4
b
B
C
h
i
5
c
g
A
b
f
B
B
O
C
A
F
B
P
X
b
7
d
E
D

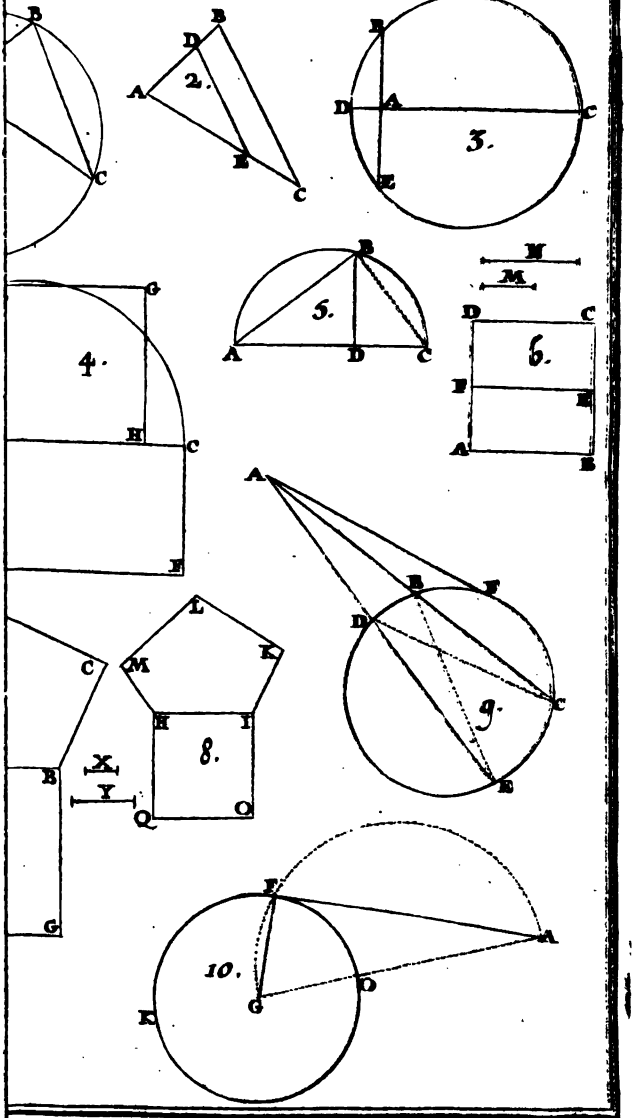

D
G
E
B
C
d
g
2
e
3
b
c
A
f
C
5
A
B
C
b
E
C
F
6
G
A
B
G
E
F
7
A
B
C
D
F
O
B
O
K
C
9
D
A
B
G

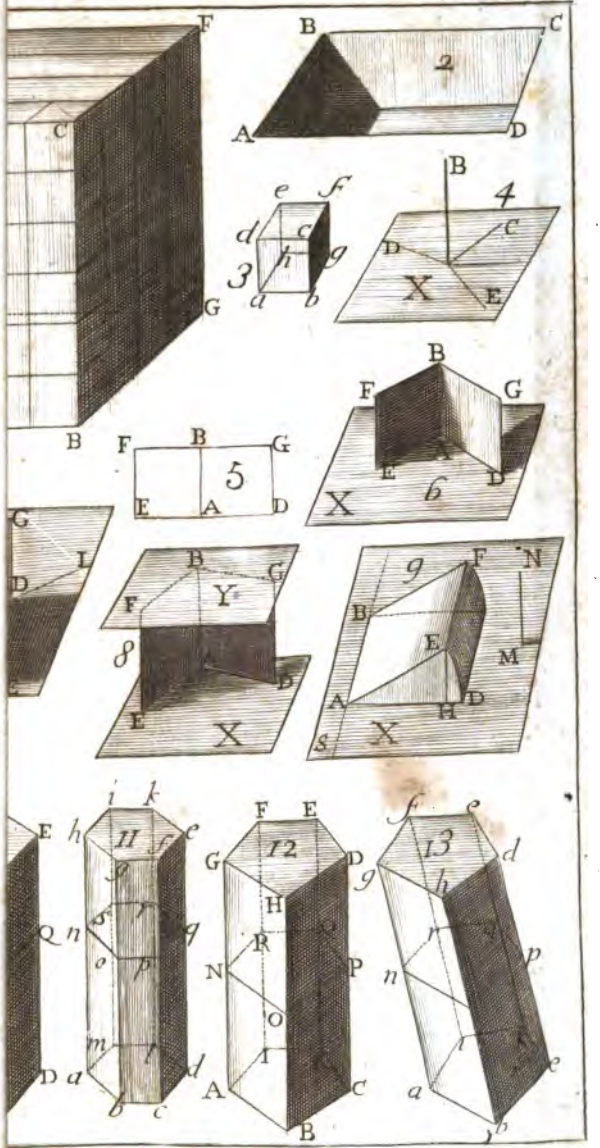

C
B
H
F
G
2
C
C
C
C
3
A
B
E
C
A
D
5
B
C
E
E
D
6
F
C
I
M
E
A
B
K
L
O
N
M
L
P

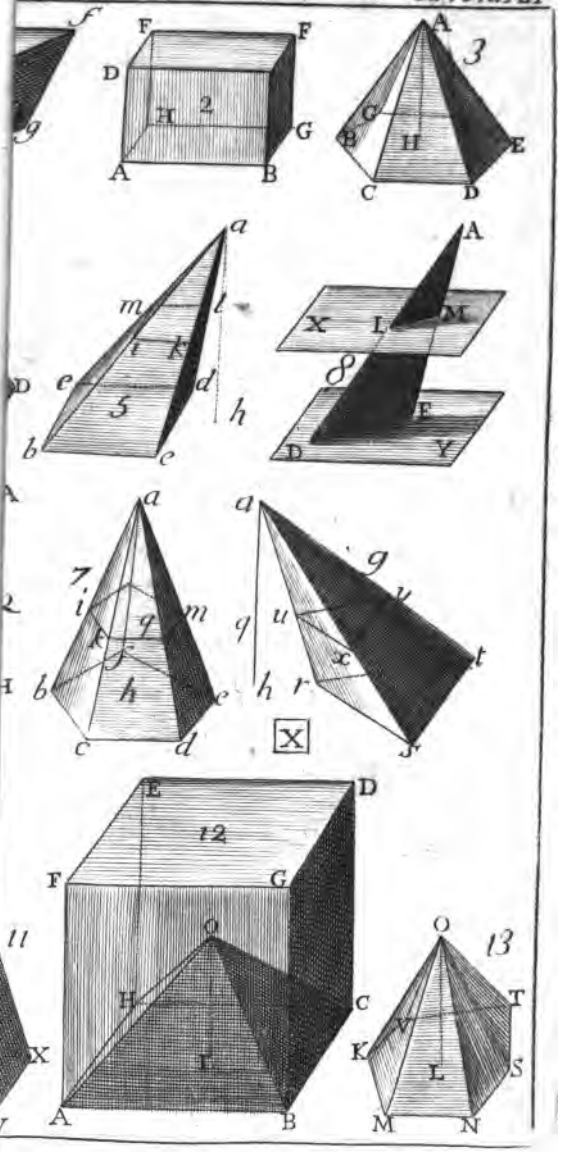

F
C
B
I
E
F
2
D
O
C
A
G
B
D
H
C
F
4
f
E
A
d
k
L
K
5
D
H
B
6
A
D
O
9
N
H
D
K
L
C
D
B
H
A
7
I
E
G
C
B
F
A
E
s
c
a
k
b
11
e
d
C
A
K
B
12
E
D


X
A
3
B
H
C
D
E
H
K
Y
2
1
1
C
4
L
G
A
F
3
E
M
O
F
C
6
M
H
I
L
P
g
a
h
f
i
C
B
q
A
g
c
m
l
r
k
p
n
T
C
L
B
e
E
II
G
A
B
F
12
A
M
B


4
5
6
7
8
9
10
11
A
B
C
D
E
F
G
H
I
L
O
S
a
b
c
d


B
C
B
D
A
2.
E
C
B
D
A
C
3.
E
G
4.
H
C
F
B
5.
A
D
C
M
M
D
C
6.
F
E
A
B
A
B
F
D
9.
C
E
L
C
M
K
H
I
8.
X
Y
E
Q
O
G
F
A
10.
O
G
K


F
C
B
G
B
C
2
A
D
e
f
d
c
h
g
3
a
b
B
4
C
D
X
E
B
F
G
5
E
A
D
B
F
G
E
A
D
X
6
G
L
D
B
G
F
Y
8
E
D
X
9
F
N
B
E
M
A
H
D
S
X
i
k
E
h
11
f
e
g
Q
n
r
q
o
p
m
l
D
a
d
b
c
F
E
G
12
D
g
H
R
Q
N
P
O
I
A
C
B
f
e
13
d
h
r
q
n
p
l
a
e
b


f
g
F
F
D
H
2
G
A
B
A
3
C
B
H
E
C
D
a
m
l
t
k
D
e
d
5
h
b
e
A
X
L
M
8
E
D
Y
A
a
7
i
q
m
2
f
H
b
h
e
c
d
a
g
q
u
v
t
x
h
r
X
E
D
12
F
G
11
O
H
C
X
I
V
A
B
O
13
T
K
V
L
S
M
N